Déterminer les réels A, B et C tels que

1. $$\frac{2p+1}{p(p+2)(p-3)} = \frac{A}{p} + \frac{B}{p+2} + \frac{C}{p-3}$$
2. $$\frac{5}{(p+1)^2(p-3)} = \frac{A}{(p+1)^2} + \frac{B}{p+1} + \frac{C}{p-3}$$
3. $$\frac{p}{(p^2+1)(p+3)} = \frac{Ap+C}{p^2+1} + \frac{C}{p+3}$$

---

1. Notons $G(p) = \dfrac{2p+1}{p(p+2)(p-3)} = \dfrac{A}{p} + \dfrac{B}{p+2} + \dfrac{C}{p-3}$

   METHODE 1 : mise au même dénominateur.

   On a : $G(p) = \dfrac{2p+1}{p(p+2)(p-3)} = \dfrac{A(p+2)(p-3)}{p(p+2)(p-3)} + \dfrac{Bp(p-3)}{p(p+2)(p-3)} + \dfrac{Cp(p+2)}{p(p+2)(p-3)}$

   puis $G(p) = \dfrac{0p^2+2p+1}{p(p+2)(p-3)} = \dfrac{A(p^2-p-6)}{p(p+2)(p-3)} + \dfrac{B(p^2-3p)}{p(p+2)(p-3)} + \dfrac{C(p^2+2p)}{p(p+2)(p-3)}$

   et enfin $G(p) = \dfrac{0p^2+2p+1}{p(p+2)(p-3)} = \dfrac{(A+B+C)p^2+(-A-3B+2C)p-6A}{p(p+2)(p-3)}$

   On peut donc identifier les termes en p^2, ceux en p puis ceux sans p

   Cela donne le système $\left\{\begin{array}{lcl} A+B+C & = & 0 \\ -A-3B+2C & = & 2 \\ -6A & = & 1 \end{array}\right.$ donc $\left\{\begin{array}{lcl} B+C & = & \frac{1}{6} \\ -3B+2C & = & \frac{11}{6} \\ A & = & \frac{-1}{6} \end{array}\right.$

   puis $\left\{\begin{array}{lcl} B+C & = & \frac{1}{6} \\ 5C & = & \frac{14}{6} \\ A & = & \frac{-1}{6} \end{array}\right.$ et enfin $\left\{\begin{array}{lcl} B & = & \frac{-3}{10} \\ C & = & \frac{7}{15} \\ A & = & \frac{-1}{6} \end{array}\right.$

   METHODE 2 : utilisation des limites.

   Pour trouver A, associé à p, on multiplie l'égalité par p , on simplifie puis on fait tendre p vers 0

   Cela donne : $pG(p) = \dfrac{(2p+1)p}{p(p+2)(p-3)} = \dfrac{Ap}{p} + \dfrac{Bp}{p+2} + \dfrac{Cp}{p-3}$

   Puis $pG(p) = \dfrac{2p+1}{(p+2)(p-3)} = A + \dfrac{Bp}{p+2} + \dfrac{Cp}{p-3}$

et enfin $\lim_{p \to 0} pG(p) = \frac{-1}{6} = A + 0 + 0$ donc $\boxed{A = \frac{-1}{6}}$

Pour trouver B, associé à $p+2$, on multiplie l'égalité par $(p+2)$, on simplifie puis on fait tendre p vers -2

Cela donne : $(p+2)G(p) = \frac{(2p+1)(p+2)}{p(p+2)(p-3)} = \frac{A(p+2)}{p} + \frac{B(p+2)}{p+2} + \frac{C(p+2)}{p-3}$

Puis $(p+2)G(p) = \frac{2p+1}{p(p-3)} = \frac{A(p+2)}{p} + B + \frac{C(p+2)}{p-3}$

et enfin $\lim_{p \to -2} (p+2)G(p) = \frac{-3}{10} = 0 + B + 0$ donc $\boxed{B = \frac{-3}{10}}$

Pour trouver C, associé à $p-3$, on multiplie l'égalité par $(p-3)$, on simplifie puis on fait tendre p vers 3

Cela donne : $(p-3)G(p) = \frac{(2p+1)(p-3)}{p(p+2)(p-3)} = \frac{A(p-3)}{p} + \frac{B(p-3)}{p+2} + \frac{C(p-3)}{p-3}$

Puis $(p-3)G(p) = \frac{2p+1}{p(p+2)} = \frac{2p+1}{p(p+2)} = \frac{A(p-3)}{p} + \frac{B(p-3)}{p+2} + C$

et enfin $\lim_{p \to 3} (p-3)G(p) = \frac{7}{15} = 0 + 0 + C$ donc $\boxed{C = \frac{7}{15}}$

Avec les deux méthodes, on obtient donc

$$G(p) = \frac{2p+1}{p(p+2)(p-3)} = \frac{-1}{6} \times \frac{1}{p} - \frac{3}{10} \times \frac{1}{p+2} + \frac{7}{15} \times \frac{1}{p-3}$$

2. On pose $G(p) = \frac{5}{(p+1)^2(p-3)} = \frac{A}{(p+1)^2} + \frac{B}{p+1} + \frac{C}{p-3}$

   La méthode 1 fonctionne toujours, pour la méthode 2, on ne peut obtenir que A et C, pour connaître B, il faudra ruser un peu.

   Pour A, on calcule la limite en -1 de $(p+1)^2G(p)$ après avoir simplifié, on obtient : $\boxed{A = \frac{-5}{4}}$

   Pour C, on calcule la limite en 3 de $(p-3)G(p)$ après avoir simplifié, on obtient : $\boxed{C = \frac{5}{16}}$

Pour B, on dispose de plusieurs sous-méthodes :

- On donne une valeur simple à p, par exemple $p = 0$,
on obtient : $G(0) = \dfrac{5}{-3} = A + B - \dfrac{C}{3}$ donc $\boxed{B = \dfrac{-5}{16}}$
- On calcule $\lim\limits_{p \to +\infty} pG(p) = 0 = 0 + B + C$
donc $B = -C = \dfrac{-5}{16}$
en effet, on a par exemple $\dfrac{Bp}{p+1} = \dfrac{B}{1+\frac{1}{p}}$

3. On pose $G(p) = \dfrac{p}{(p^2+1)(p+3)} = \dfrac{Ap+C}{p^2+1} + \dfrac{C}{p+3}$

Lorsque le dénominateur fait apparaître un polynôme de degré 2 non factorisable dans $\mathbb{R}$, on peut encore utiliser la méthode 2 mais il faudra utiliser les complexes. La méthode 1 fonctionne toujours.

Pour trouver C, associé à $p+3$, on multiplie l'égalité par $(p+3)$, on simplifie puis on fait tendre p vers -3

Cela donne : $(p+3)G(p) = \dfrac{p(p+3)}{(p^2+1)(p+3)} = \dfrac{(Ap+C)(p+3)}{p^2+1} + \dfrac{C(p+3)}{p+3}$

Puis $(p+3)G(p) = \dfrac{p}{p^2+1} = \dfrac{(Ap+C)(p+3)}{p^2+1} + C$

et enfin $\lim\limits_{p \to -3} (p+3)G(p) = \dfrac{-3}{10} = 0 + C$ donc $\boxed{C = \dfrac{-3}{10}}$

Pour trouver A et B, associé à p^2+1, on multiplie l'égalité par (p^2+1) , on simplifie puis on fait tendre p vers i

Cela donne : $(p^2+1)G(p) = \dfrac{p(p^2+1)}{(p^2+1)(p+3)} = \dfrac{(Ap+C)(p^2+1)}{p^2+1} + \dfrac{C(p^2+1)}{p+3}$

Puis $(p^2+1)G(p) = \dfrac{p}{p+3} = Ap + B + \dfrac{C(p^2+1)}{p+3}$

et enfin $\lim\limits_{p \to i} (p^2+1)G(p) = \dfrac{i}{3+i} = Ai + B + 0$ or $\dfrac{i}{3+i} = \dfrac{1+3i}{10}$

donc $\boxed{A = \dfrac{3}{10}}$ en identifiant les parties réelles et $\boxed{B = \dfrac{1}{10}}$ en identifiant les parties imaginaires.