1. Résoudre l'équation différentielle $y' + 3y = 5e^{3t}$ sachant que $y(0) = 1$

   On recherchera une solution particulière sous la forme $y_p(t) = Ae^{3t}$ où A est un réel fixe.

   Etape 1 : On recherche toutes les solutions de l'équation homogène associée.

   $a = 1$ et $b = 3$ donc $F'(t) = \dfrac{b}{a} = 3$

   Une primitive est alors $F(t) = 3t + 0$

   Toutes les solutions sont les $y(t) = Ce^{-F(t)} = Ce^{-3t}$ où C est une constante réelle quelconque.

   Etape 2 : On recherche une solution particulière de l'équation complète.

   Le second membre est une exponentielle différente de celles obtenues dans (SSM)

   donc on recherche une solution particulière y_p exponentielle sous la forme $y_p(t) = Ae^{3t}$

   Dans ce cas $y_p'(t) = 3Ae^{3t}$

   L'équation devient : $3Ae^{3t} + 3Ae^{3t} = 5e^{3t}$ puis $3A + 3A = 5$ donc $6A = 5$ Finalement $A = \frac{5}{6}$

   Une solution particulière de l'équation avec second membre est alors $y_p(t) = \frac{5}{6}e^{3t}$

   Etape 3 : y est une solution de l'équation complète équivaut à $y - y_p$ est une solution de (SSM)

   donc toutes les solutions de l'équation complète sont les sommes : $y(t) = Ce^{-3t} + \frac{5}{6}e^{3t}$

   Etape 4 : Puisque $y(0) = 1$ on a : $1 = Ce^0 + \frac{5}{6}e^0$ donc $C = \frac{1}{6}$

   L'unique solution du problème différentiel est : $\boxed{y(t) = \frac{1}{6}e^{-3t} + \frac{5}{6}e^{3t}}$

2. Résoudre l'équation différentielle $y' + 3y = 2t + 3$ sachant que $y(0) = 3$

   On recherchera une solution particulière sous la forme $y_p(t) = At + B$ où A et B sont des réels fixes.

   Etape 1 : On recherche toutes les solutions de l'équation homogène associée.

   $a = 1$ et $b = 3$ donc $F'(t) = \dfrac{b}{a} = 3$

   Une primitive est alors $F(t) = 3t + 0$

   Toutes les solutions sont les $y(t) = Ce^{-F(t)} = Ce^{-3t}$ où C est une constante réelle quelconque.

Etape 2 : On recherche une solution particulière de l'équation complète.

Le second membre est une fonction affine

donc on recherche une solution particulière y_p sous la forme d'une fonction affine.

Dans ce cas $y_p(t) = At + B$ donc $y_p'(t) = A$

L'équation devient : $A + 3(At + B) = 2t + 3$ puis $3At + A + 3B = 2t + 3$

On peut alors identifier, les termes en t ensemble et les termes constants ensemble

$$\begin{cases} 3A &= 2 \\ A + 3B &= 3 \end{cases}$$

donc $A = \frac{2}{3}$ puis $B = \frac{7}{9}$

Une solution particulière de l'équation avec second membre est alors $y_p(t) = \frac{2}{3}t + \frac{7}{9}$

Etape 3 : y est une solution de l'équation équivaut à $y - y_p$ est une solution de (SSM)

donc toutes les solutions de l'équation complète sont les sommes : $y(t) = Ce^{-3t} + \frac{2}{3}t + \frac{7}{9}$

Etape 4 : Puisque $y(0) = 3$ on a : $3 = Ce^0 + 0 + \frac{7}{9}$ donc $C = \frac{20}{9}$

L'unique solution du problème différentiel est : $\boxed{y(t) = \frac{20}{9}e^{-3t} + \frac{2}{3}t + \frac{7}{9}}$

3. Résoudre l'équation différentielle $y' + 3y = \sin(2t)$ sachant que $y(0) = 5$

On recherchera une solution particulière sous la forme $y_p(t) = A\cos(2t) + B\sin(2t)$ où A et B sont des réels fixes.

Etape 1 : On recherche toutes les solutions de l'équation homogène associée.

$a = 1$ et $b = 3$ donc $F'(t) = \dfrac{b}{a} = 3$

Une primitive est alors $F(t) = 3t + 0$

Toutes les solutions sont les $y(t) = Ce^{-F(t)} = Ce^{-3t}$ où C est une constante réelle quelconque.

Etape 2 : On recherche une solution particulière de l'équation complète.

Le second membre est une fonction cosinus donc on recherche une solution particulière y_p sous la forme

$y_p(t) = A\cos(2t) + B\sin(2t)$ donc $y_p'(t) = -2A\sin(2t) + 2B\cos(2t)$

L'équation devient : $1\Big(-2A\sin(2t)+2B\cos(2t)\Big)+3\Big(A\cos(2t)+B\sin(2t)\Big) = 1\sin(2t)$
puis $\Big(2B+3A\Big)\cos(2t)+\Big(-2A+3B\Big)\sin(2t) = 0\cos(2t)+1\sin(2t)$
On peut alors identifier, les termes en cosinus ensemble et les termes en sinus ensemble
$\begin{cases} 3A+2B &= 0 \\ -2A+3B &= 1 \end{cases}$ donc $3A=-2B$ puis $A=\frac{-2}{3}B$

puis en renvoyant dans l'autre équation, on a : $\frac{4}{3}B+3B=1$ donc $\frac{13}{3}B=1$ donc $B=\frac{3}{13}$
Et enfin $A=\frac{-2}{3}\times B=\frac{-2}{13}$

Une solution particulière de l'équation avec second membre est alors $y_p(t)=\frac{-2}{13}\cos(2t)+\frac{3}{13}\sin(2t)$

Etape 3 : y est une solution de l'équation équivaut à $y-y_p$ est une solution de (SSM) donc toutes les solutions de l'équation complète sont les sommes :

$$y(t)=Ce^{-3t}-\frac{2}{13}\cos(2t)+\frac{3}{13}\sin(2t)$$

Etape 4 : Puisque $y(0)=5$ on a : $5=Ce^{0}-\frac{2}{13}+0$ donc $C=\frac{67}{13}$

L'unique solution du problème différentiel est : $\boxed{y(t)=\frac{67}{13}e^{-3t}-\frac{2}{13}\cos(2t)+\frac{3}{13}\sin(2t)}$