1. Calculer les dérivées des fonctions suivantes

$f_1(x) = \dfrac{2x+3}{x^2+4}$ $\quad f_2(x) = \dfrac{1}{x}e^{-3x}$ $\quad f_3(x) = \ln \dfrac{1}{\sqrt{x^2+4}}$ $\quad f_4(x) = e^{-x}\sin(2x)$

$$f_1'(x) = \frac{2(x^2+4)-(2x+3)(2x)}{(x^2+4)^2} = \boxed{\frac{-2x^2-6x+8}{(x^2+4)^2}}$$

$$f_2'(x) = \frac{-1}{x^2}e^{-3x} + \frac{1}{x}(-3)e^{-3x} = \boxed{-\frac{(1+3x)e^{-3x}}{x^2}}$$

$$f_3(x) = -\frac{1}{2}\ln(x^2+4) \text{ donc } \boxed{f_3'(x) = \frac{-x}{x^2+4}}$$

$$f_4(x) = e^{-x}\sin(2x) \text{ donc } f_4'(x) = -e^{-x}\sin(2x) + e^{-2x}2\cos(2x) = \boxed{e^{-2x}\Big(2\cos(2x)-\sin(2x)\Big)}$$

2. Étudier les variations de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = (x^2-3x+1)e^{-x}$

On a : $f'(x) = (2x-3)^{e}-x-(x^2-3x+1)e^{-x} = (-x^2+5x-4)e^{-x}$

Le signe de e^{-x} est positif.

Étudions le signe de $(-x^2+5x-4)$. Son discriminant est $\Delta = 25-16 = 9 > 0$

Il y a deux racines : $\dfrac{-5\pm 3}{-2}$ c'est à dire 4 et 1

x	$-\infty$		1		4		$+\infty$
e^{-3x}		$+$		$+$		$+$	
$(-x^2+5x-4)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$		$\searrow$	$f(1)$	$\nearrow$	$f(4)$	$\searrow$	

3. Déterminer les réels a, b et c pour que

$F(x) = (ax^2+bx+c)^{-2x}$ soit une primitive de $f(x) = (1-5x^2)e^{-2x}$

On calcule $F'(x) = (-2ax^2+(2a-2b)x+b-2c)e^{-2x}$

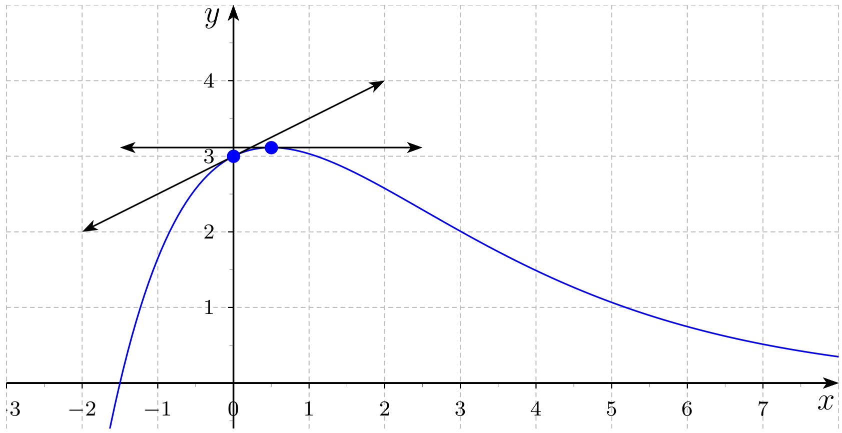
que l'on compare à $f(x) = (-5x^2+0x+1)e^{-2x}$

Puis on identifie les termes de même degré : $-2a = -5$ et $2a-2b = 0$ et $b-2c = 1$

donc $a = \dfrac{5}{2}$ et $b = a = \dfrac{5}{2}$ et enfin $c = \dfrac{b-1}{2} = \dfrac{3}{4}$

On a obtenu que $f(x) = \left(\dfrac{5}{2}x^2 + \dfrac{5}{2}x + \dfrac{3}{4}\right)e^{-2x}$

4. En utilisant le graphique, lire $f(0)$, $f'(0)$ et $f'(\frac{1}{2})$. Puis en déduire les valeurs de a, b et c pour que $f(x) = (ax+b)e^{cx}$



$\boxed{f(0) = 3}$ et $\boxed{f'(0) = \dfrac{1}{2}}$ c'est la pente de la tangente en 0

$\boxed{f'(\frac{1}{2}) = 0}$ c'est la pente de la tangente en $\frac{1}{2}$

Or : $f(x) = (ax+b)e^{cx}$ donc $f(0) = b$ donc $b = 3$

et $f'(x) = (acx + a + bc)e^{cx}$ donc $f'(0) = a - b$ donc $a + 3c = \frac{1}{2}$

enfin $f'(\frac{1}{2}) = 0$ donc $0 = \frac{1}{2}ac + a + 3c = 0$

Les deux dernières égalités donnent $0 = \frac{1}{2}ac + \frac{1}{2}$ donc $ac = -1$

Puisque $a + 3c = \frac{1}{2}$, en multipliant par a cela donne $a^2 - 3 = \frac{1}{2}a$ donc $a^2 - \frac{1}{2}a - 3 = 0$

On obtient : $a = 2$ ou $a = \frac{-3}{2}$

Puisque $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) < 0$ seule la valeur $a = 2$ convient. Puis $c = \dfrac{-1}{2}$

On a obtenu que $\boxed{f(x) = (2x+3)e^{-x/2}}$