1. Résoudre $2y'' + 3y' - 5y = 15$ sachant que $y(0) = 1$ et $y'(0) = 0$

   Etape 1 : Son équation caractéristique est : $(EC) : 2r^2 + 3r - 5 = 0$

   Son discriminant est $\Delta = 3^2 - 4 \times 2 \times (-5) = 49 > 0$
   Une racine de Δ est alors 7
   (EC) a deux solutions $r_1 = \frac{-3-7}{4}$ et $r_2 = \frac{-3+7}{4}$
   C'est à dire $r_1 = \frac{-5}{2}$ et $r_2 = 1$
   Toutes les solutions de l'équation sans second membre sont alors les : $y(t) = C_1 e^{\frac{-5}{2}t} + C_2 e^t$ où C_1 et C_2 sont des constantes réelles quelconques.

   Etape 2 : On recherche une solution particulière de l'équation complète.
   Le second membre est une constante
   donc on recherche une solution particulière y_p sous la forme d'une constante.
   Dans ce cas $y_p(t) = K$ donc $y_p'(t) = 0$ puis $y_p''(t) = 0$

   L'équation devient : $2 \times 0 + 3 \times 0 - 5 \times K = 15$ donc $K = -3$
   Une solution particulière de l'équation avec second membre est alors $y_p(t) = -3$

   Etape 3 : y est une solution de l'équation équivaut à $y - y_p$ est une solution de (SSM)
   donc toutes les solutions de l'équation complète sont les sommes : $y(t) = C_1 e^{\frac{-5}{2}t} + C_2 e^t - 3$

   Etape 4 : On détermine l'unique solution correspondant aux conditions initiales.
   On a : $y(t) = C_1 e^{\frac{-5}{2}t} + C_2 e^t - 3$
   $y(0) = C_1 + C_2 - 3$ or $y(0) = 1$
   donc $C_1 + C_2 = 4$
   Par ailleurs $y'(t) = \frac{-5}{2} C_1 e^{\frac{-5}{2}t} + C2e^t + 0$
   donc $y'(0) = \frac{-5}{2} C_1 C_2$ or $y'(0) = 0$
   donc $\frac{-5}{2} C_1 C_2 = 0$
   On dispose alors du système $\begin{cases} C_1 + C_2 = 4 \\ \frac{-5}{2} C_1 + C_2 = 0 \end{cases}$
   On dispose alors du système $\begin{cases} C_1 + C_2 = 4 \\ C_2 = \frac{20}{7} \end{cases}$
   Puis $C_1 = \frac{8}{7}$ en reportant dans la première équation¡br¿Finalement l'unique solution du problème est $\boxed{y(t) = \frac{8}{7} e^{\frac{-5}{2}t} + \frac{20}{7} e^t - 3}$

2. Résoudre $9y'' - 1y = e^{2x}$ sachant que $y(0) = 1$ et $y'(0) = 0$

On recherchera une solution particulière sous la forme $y(t) = Ke^{2t}$

Etape 1 : Son équation caractéristique est : $(EC) : 9r^2 + 0 - 1 = 0$

Son discriminant est $\Delta = 0^2 - 4 \times 9 \times (-1) = 36 > 0$. Une racine de Δ est alors 6

(EC) a deux solutions $r_1 = \frac{0-6}{18}$ et $r_2 = \frac{0+6}{18}$. C'est à dire $r_1 = \frac{-1}{3}$ et $r_2 = \frac{1}{3}$

Toutes les solutions de l'équation sans second membre sont alors les :

$$y(t) = C_1 e^{\frac{-1}{3}t} + C_2 e^{\frac{1}{3}t}$$

où C_1 et C_2 sont des constantes réelles quelconques.

Etape 2 : On recherche une solution particulière de l'équation complète.

Le second membre est une de la forme e^{mt} mais m n'est pas l'une des racines de l'équation caractéristique

donc on recherche une solution particulière sous la forme d'une constante $y_p(t) = Ke^{2t}$

Dans ce cas $y_p'(t) = 2Ke^{2t}$ puis $y_p''(t) = 4Ke^{2t}$

L'équation devient : $9 \times 4Ke^{2t} + 0 - 2 \times Ke^{2t} = 1e^{2t}$

Simplifions par l'exponentielle, il reste : $36K + 0 - K = 1$

C'est à dire : $35K = 1$ donc $K = \frac{1}{35}$

Une solution particulière de l'équation avec second membre est alors $y_p(t) = \frac{1}{35}e^{2t}$

Etape 3 : y est une solution de l'équation équivaut à $y - y_p$ est une solution de (SSM)

donc toutes les solutions de l'équation complète sont les sommes :

$$y(t) = C_1 e^{\frac{-1}{3}t} + C_2 e^{\frac{1}{3}t} + \frac{1}{35}e^{2t}$$

Etape 4 : On détermine l'unique solution correspondant aux conditions initiales.

On a : $y(t) = C_1 e^{\frac{-1}{3}t} + C_2 e^{\frac{1}{3}t} + \frac{1}{35}e^{2t}$

$y(0) = C_1 + C_2 + \frac{1}{35}$ or $y(0) = 1$ donc $C_1 + C_2 = \frac{34}{35}$

Par ailleurs $y'(t) = \frac{-1}{3}C_1 e^{\frac{-1}{3}t} + \frac{1}{3}C_2 e^{\frac{1}{3}t} + \frac{2}{35}e^{2t}$ donc $y'(0) = \frac{-1}{3}C_1 + \frac{1}{3}C_2 + \frac{2}{35}$

or $y'(0) = 0$ donc $\frac{-1}{3}C_1 + \frac{1}{3}C_2 + \frac{2}{35} = 0$

On dispose alors du système $\begin{cases} C_1 + C_2 = \frac{34}{35} \\ \frac{-1}{3}C_1 + \frac{1}{3}C_2 = \frac{-2}{35} \end{cases}$

On dispose alors du système $\begin{cases} C_1 + C_2 = \frac{34}{35} \\ C_2 = \frac{2}{5} \end{cases}$

Puis $C_1 = \frac{4}{7}$ en reportant dans la première équation

Finalement l'unique solution du problème est $\boxed{y(t) = \frac{4}{7}e^{\frac{-1}{3}t} + \frac{2}{5}e^{\frac{1}{3}t} + \frac{1}{35}e^{2t}}$

3. Résoudre $y'' + 2y' + 2y = 3t + 4$ $y(0) = 1$ et $y'(0) = 0$

On recherchera une solution particulière sous la forme $y(t) = At + B$

Etape 1 : Son équation caractéristique est : $(EC) : r^2 + 2r + 2 = 0$

Son discriminant est $\Delta = 2^2 - 4 \times 1 \times 2 = -4 < 0$

Une racine de Δ est alors $2i$

(EC) a deux solutions $r_1 = \frac{-2-2i}{2}$ et $r_2 = \frac{-2+2i}{2}$

C'est à dire $r_1 = -1 - i$ et $r_2 = -1 + i$

Toutes les solutions de l'équation différentielle sont les : $y(t) = e^{-t} \times \Big(C_1 \cos t + C_2 \sin t\Big)$
où C_1 et C_2 sont des constantes réelles quelconques.

Etape 2 : On recherche une solution particulière de l'équation complète.
Le second membre est une affine

donc on recherche une solution particulière y_p sous la forme $y_p(t) = At + B$
donc $y_p'(t) = A$ puis $y_p''(t) = 0$
L'équation devient : $1 \times 0 + 2A + 2(At + B) = 3t + 4$
donc en ordonnant les termes : $2At + 2A + 2B = 3t + 4$
on peut alors identifier les termes en t, cela donne : $2A = 3$ donc $A = \frac{3}{2}$
puis $2A + 2B = 4$ donc $2B = 4 - 2A = 1$ donc $B = \frac{1}{2}$
Une solution particulière de l'équation avec second membre est alors $y_p(t) = \frac{3}{2}t + \frac{1}{2}$

Etape 3 : y est une solution de l'équation équivaut à $y - y_p$ est une solution de (SSM)
donc toutes les solutions de l'équation complète sont les sommes :

$$y(t) = e^{-t} \times \Big(C_1 \cos t + C_2 \sin t\Big) + \frac{3}{2}t + \frac{1}{2}$$

Etape 4 : On détermine l'unique solution correspondant aux conditions initiales.
Puisque $y(0) = 1$ on a : $1 = e^0 \times (C_1 \cos 0 + C_2 \sin 0) + 0 + \frac{1}{2}$ donc $C_1 = \frac{1}{2}$

Par ailleurs on a : $y'(t) = -1 \times e^{-t} \times \Big(C_1 \cos t + C_2 \sin t\Big) + e^{-t} \times \Big(-C_1 \sin t + C_2 \cos t\Big) + \frac{3}{2}$
donc $y'(0) = -e^0 \Big(C_1 \times 1 + C_2 \times 0\Big) + e^0 \Big(-C_1 \times 0 + C_2 \times 1\Big) + \frac{3}{2}$
Puisque $y'(0) = 0$, on a : $\frac{-3}{2} = -C_1 + C_2$ Or $C_1 = \frac{1}{2}$ donc $C_2 = -1$

L'unique solution du problème est alors $\boxed{y(t) = e^{-t} \times \Big(\frac{1}{2} \cos t - 1 \sin t\Big) + \frac{3}{2}t + \frac{1}{2}}$