

On considère la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 4(5x - 1)e^{-2x}$.

1. Calculer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.

$$f(x) = \frac{20x}{e^{2x}} - \frac{4}{e^{2x}}$$

Par croissances comparées de x par rapport à e^{2x} on a : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{20x}{e^{2x}} = 0$ donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} 4(5x - 1) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x} = +\infty$ donc par produit $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$

2. Montrer que $f'(x) = 4(7 - 10x)e^{-2x}$.

f est un produit donc $f'(x) = 4(5e^{-2x} + (5x - 1)(-2)e^{-2x}) = 4e^{-2x}(5 - 10x + 2) = 4(7 - 10x)e^{-2x}$

3. Étudier le signe de $f'(x)$ et établir le tableau des variations de f .

$(7 - 10x)$ est affine décroissant, il s'annule en $x = \frac{7}{10}$. Par ailleurs e^{-2x} reste positif

Donc on a :

x	0	$\frac{7}{10}$	$+\infty$
$7 - 10x$	+	0	-
e^{-2x}	+		+
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	$-\infty$	max	0

4. Montrer que f admet un maximum, en donner la valeur exacte et une valeur approchée à 10^{-2} près.

Puisque f est strictement croissante sur $]-\infty; \frac{7}{10}[$ puis strictement décroissante sur $]\frac{7}{10}; +\infty[$,

la fonction f admet un maximum local en $x = \frac{7}{10}$

dont la valeur est $f(\frac{7}{10}) = 10e^{-\frac{7}{5}} \approx 2,47$

5. Établir qu'une équation de la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse $x = \frac{6}{5}$ est

$$y = 4e^{-12/5}(11 - 5x)$$

On a : $f'(\frac{6}{5}) = -20e^{-\frac{12}{5}}$ et $f(\frac{6}{5}) = 20e^{-\frac{12}{5}}$ donc l'équation de la tangente est

$$y = -20e^{-\frac{12}{5}}(x - \frac{6}{5}) + 20e^{-\frac{12}{5}} = 20e^{-\frac{12}{5}} \times \left(1 - \frac{x}{5}\right) = 4e^{-12/5}(11 - 5x)$$

6. Déterminer les réels a et b pour que $F(x) = (ax + b)e^{-2x}$ soit une primitives de f sur $\mathbb{R}$

On a : $F'(x) = ae^{-2x} - 2(ax + b)e^{-2x} = e^{-2x}(-2ax + a - 2b)$ or $F'(x) = f(x) = (20x - 4)e^{-2x}$

donc $-2a = 20$ et $a - 2b = -4$ c'est à dire $a = -10$ et $b = -3$

On a obtenu qu'une primitive de f est $F(x) = -(10x + 3)e^{-2x}$

7. Soit $M > 0$, en déduire la valeur $I_M = \int_0^M f(x)dx$ en fonction de M

On a : $I_M = \int_0^M f(x)dx = [F(x)]_0^M = -(10M + 3)e^{-2M} + 3$

8. Quelle est la limite de cette valeur lorsque M tend vers $+\infty$. Que cela représente-t-il ?

Par croissances comparées, on a : $\lim_{M \rightarrow +\infty} (10M + 3)e^{-2M} = 0$ donc $\lim_{M \rightarrow +\infty} I_M = 3$

L'aire sous la courbe de $1/5$ à $+\infty$ moins celle de 0 à $1/5$ est égale à 3 unités d'aires.

