On considère un système électrique régi par la fonction de transfert $T(x) = \dfrac{1}{1+jx}$ où j est le complexe de module 1 et d'argument $\frac{\pi}{2}$

Ce j est le i des mathématiciens car en physique i est déjà utilisé pour représenter l'intensité d'un courant électrique.

1. Calculer le module et un argument de $T(1)$

   $T(1) = \dfrac{1}{1+j}$

   donc $|T(1)| = \left|\dfrac{1}{1+j}\right| = \dfrac{1}{|1+j|} = \dfrac{1}{\sqrt{1^2+1^2}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

   puis $\arg(T(1)) = \arg\left(\dfrac{1}{1+j}\right) = -\arg(1+j)$

   On a : $|1+j| = \sqrt{2}$ en notant $\theta = \arg(1+j)$ on a : $\cos(\theta) = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ donc $\theta = \pm\dfrac{\pi}{4}$

   mais $\sin(\theta) = \dfrac{1}{\sqrt{2}} > 0$ donc $\theta = +\dfrac{\pi}{4}$

   Finalement $\arg(T(1)) = -\dfrac{\pi}{4}$

2. On appelle gain en décibels la fonction définie par $G_{dB}(x) = 20\log\Big|T(x)\Big|$

   (a) Montrer que $G_{dB}(x) = \frac{-10}{\ln(10)} \times \ln(1+x^2)$

   $$G_{dB}(x) = 20\log\Big|T(x)\Big| = 20\log\left|\frac{1}{1+jx}\right|$$
   $$= \frac{20}{\ln(10)}\ln\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{-20}{\ln(10)} \times \ln\sqrt{1+x^2}$$
   $$= \frac{-10}{\ln(10)} \times \ln(1+x^2)$$

   (b) Calculer $\lim\limits_{x\to 0_+} G_{dB}(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} G_{dB}(x)$

   $$\lim_{x\to 0_+} G_{dB}(x) = \lim_{x\to 0_+} \frac{-10}{\ln(10)} \times \ln(1+x^2) = 0$$

   et $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} G_{dB}(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{-10}{\ln(10)} \times \ln(1+x^2) = -\infty$

   (c) Calculer la dérivée de $G_{dB}(x)$ et préciser son tableau de variation.

   $G'_{dB}(x) = \dfrac{-10}{\ln(10)}\dfrac{2x}{x^2+1} < 0$ car $x \in \mathbb{R}^+$ donc on a le tableau suivant :

x	0	$+\infty$
$G'_{dB}(x)$	$-$	
$G_{dB}(x)$	0 $\searrow$	$-\infty$

(d) On appelle bande passante l'ensemble des x vérifiant $G_{dB}(x) \geqslant -3$. Résoudre cette inéquation.

$G_{dB}(x) \geqslant -3$ donc $\dfrac{-10}{\ln(10)} \times \ln(1+x^2) \geqslant -3$ donc $\ln(1+x^2) \leqslant \dfrac{3\ln(10)}{10}$

donc $1+x^2 \leqslant \exp\left(\dfrac{3\ln(10)}{10}\right)$ donc $x^2 \leqslant \exp\left(\dfrac{3\ln(10)}{10}\right) - 1$

Puis $0 < x \leqslant \sqrt{\exp\left(\dfrac{3\ln(10)}{10}\right) - 1}$ car $x > 0$

donc $x \leqslant 0,998$

(e) Est-ce un filtre passe bas ? passe haut ? passe bande ?

Le gain est supérieur à -3dB pour les x inférieurs à environ 1, il laisse donc passer les basses fréquences, c'est un passe-bas.