Résoudre l'équation différentielle $4y'' + 3y' - 7y = f(t)$ sachant que $y(0) = 1$ et $y'(0) = 0$ dans chacun des cas suivants :

1. $f(t) = 0$

   Etape 1 : Son équation caractéristique est : $(EC) : 4r^2 + 3r - 7 = 0$

   Son discriminant est $\Delta = 3^2 - 4 \times 4 \times (-7) = 121 > 0$

   Une racine de Δ est alors 11

   (EC) a deux solutions $r_1 = \frac{-3-11}{8}$ et $r_2 = \frac{-3+11}{8}$

   C'est à dire $r_1 = \frac{-7}{4}$ et $r_2 = 1$

   Toutes les solutions de l'équation sans second membre sont alors les : $y(t) = C_1 e^{\frac{-7}{4}t} + C_2 e^t$ où C_1 et C_2 sont des constantes réelles quelconques.

   Etape 2 : On détermine l'unique solution correspondant aux conditions initiales.

   Puisque $y(0) = 1$ on a : $1 = C_1 e^0 + C_2 e^0$ donc $C_1 + C_2 = 1$

   Par ailleurs on a : $y'(t) = \frac{-7}{4} C_1 e^{\frac{-7}{4}t} + C_2 e^t$ donc $0 = \frac{-7}{4} C_1 + C_2$

   On dispose alors du système $\begin{cases} C_1 + C_2 = 1 \\ \frac{-7}{4} C_1 + 1 C_2 = 0 \end{cases}$ donc $\begin{cases} C_1 = 1 - C_2 \\ \frac{-11}{4} C_2 = \frac{-7}{4} \end{cases}$ $\frac{-7}{4}(L_1) - (L_2)$

   donc $C_2 = \frac{7}{11}$ puis, en reportant dans la première équation : $C_1 = \frac{4}{11}$

   L'unique solution du problème est alors : $\boxed{y(t) = \frac{4}{11} e^{\frac{-7}{4}t} + \frac{7}{11} e^t}$

2. $f(t) = 5$

   Etape 1 : voir la question 1)

   Etape 2 : On recherche une solution particulière de l'équation complète.

   Le second membre est une constante

   donc on recherche une solution particulière y_p sous la forme d'une constante.

   Dans ce cas $y_p(t) = K$ donc $y_p'(t) = 0$ puis $y_p''(t) = 0$

   L'équation devient : $4 \times 0 + 3 \times 0 - 7 \times K = 5$ donc $K = \frac{-5}{7}$

   Une solution particulière de l'équation avec second membre est alors $y_p(t) = -\frac{5}{7}$

   Etape 3 : y est une solution de l'équation équivaut à $y - y_p$ est une solution de (SSM) donc toutes les solutions de l'équation complète sont les sommes : $y(t) = C_1 e^{\frac{-7}{4}t} + C_2 e^t - \frac{5}{7}$

   Etape 4 : On détermine l'unique solution correspondant aux conditions initiales.

   On a : $y(t) = C_1 e^{\frac{-7}{4}t} + C_2 e^t - \frac{5}{7}$

   $y(0) = C_1 + C_2 - \frac{5}{7}$ or $y(0) = 1$

   donc $C_1 + C_2 = \frac{12}{7}$

   Par ailleurs $y'(t) = \frac{-7}{4} C_1 e^{\frac{-7}{4}t} + C_2 e^t + 0$

   donc $y'(0) = \frac{-7}{4} C_1 + C_2$ or $y'(0) = 0$

   donc $\frac{-7}{4} C_1 + C_2 = 0$

   On dispose alors du système $\begin{cases} C_1 + C_2 = \frac{12}{7} \\ \frac{-7}{4} C_1 + C_2 = 0 \end{cases}$

Puis $\begin{cases} C_1 + C_2 = \frac{12}{7} \\ C_2 = \frac{12}{11} \end{cases}$

Puis $C_1 = \frac{48}{77}$ en reportant dans la première équation

Finalement l'unique solution du problème est $y(t) = \frac{48}{77}e^{\frac{-7}{4}t} + \frac{12}{11}e^t - \frac{5}{7}$

3. $f(t) = 3t + 2$

Etape 1 : voir la question 1)

Etape 2 : On recherche une solution particulière de l'équation complète.

Le second membre est une affine

donc on recherche une solution particulière y_p sous la forme $y_p(t) = At + B$

donc $y_p'(t) = A$ puis $y_p''(t) = 0$

L'équation devient : $4 \times 0 + 3A - 7(At + B) = 3t + 2$

donc en ordonnant les termes : $-7At + 3A - 7B = 3t + 2$

on peut alors identifier les termes en t, cela donne : $-7A = 3$ donc $A = \frac{-3}{7}$

puis $3A - 7B = 2$ donc $-7B = 2 - 3A = \frac{23}{7}$ donc $B = \frac{-23}{49}$

Une solution particulière de l'équation avec second membre est alors $y_p(t) = -\frac{3}{7}t - \frac{23}{49}$

Etape 3 : y est une solution de l'équation équivaut à $y - y_p$ est une solution de (SSM)

donc toutes les solutions de l'équation complète sont les sommes :

$$y(t) = C_1e^{\frac{-7}{4}t} + C_2e^t - \frac{3}{7}t - \frac{23}{49}$$

Etape 4 : On détermine l'unique solution correspondant aux conditions initiales.

On a : $y(t) = C_1e^{\frac{-7}{4}t} + C_2e^t - \frac{3}{7}t - \frac{23}{49}$ donc $y(0) = C_1 + C_2 - \frac{23}{49}$

Or $y(0) = 1$ donc $C_1 + C_2 = \frac{72}{49}$

Par ailleurs $y'(t) = \frac{-7}{4}C_1e^{\frac{-7}{4}t} + C_2e^t - \frac{3}{7}$ donc $y'(0) = \frac{-7}{4}C_1 + C_2 - \frac{3}{7}$ or $y'(0) = 0$

donc $\frac{-7}{4}C_1 + C_2 = \frac{3}{7}$

On dispose alors du système $\begin{cases} C_1 + C_2 = \frac{72}{49} \\ \frac{-7}{4}C_1 + C_2 = \frac{3}{7} \end{cases}$

Puis, par la méthode du pivot, on a : $\begin{cases} C_1 + C_2 = \frac{72}{49} \\ C_2 = \frac{12}{11} \end{cases}$

Puis en reportant dans la première équation, on a : $C_1 = \frac{204}{539}$ Finalement l'unique solution du problème est $y(t) = \frac{204}{539}e^{\frac{-7}{4}t} + \frac{12}{11}e^t - \frac{3}{7}t - \frac{23}{49}$

4. $f(t) = 5e^{-t}$

Etape 1 : voir la question 1)

Etape 2 : On recherche une solution particulière de l'équation complète.

Le second membre est une de la forme e^{mt} mais m n'est pas l'une des racines de l'équation caractéristique

donc on recherche une solution particulière sous la forme d'une constante $y_p(t) = Ke^{-t}$

Dans ce cas $y_p'(t) = -Ke^{-t}$ puis $y_p''(t) = Ke^{-t}$

L'équation devient : $4 \times Ke^{-t} + 3 \times -Ke^{-t} - 7 \times -Ke^{-t} = 5e^{-t}$

Simplifions par l'exponentielle, il reste : $4K - 3K - 7K = 5$

C'est à dire : $-6K = 5$ donc $K = \frac{-5}{6}$

Une solution particulière de l'équation avec second membre est alors $y_p(t) = -\frac{5}{6}e^{-t}$

Etape 3 : y est une solution de l'équation équivaut à $y - y_p$ est une solution de (SSM) donc toutes les solutions de l'équation complète sont les sommes :

$$y(t) = C_1 e^{\frac{-7}{4}t} + C_2 e^t - \frac{5}{6}e^{-t}$$

Etape 4 : On détermine l'unique solution correspondant aux conditions initiales.

On a : $y(t) = C_1 e^{\frac{-7}{4}t} + C_2 e^t - \frac{5}{6}e^{-t}$

$y(0) = C_1 + C_2 - \frac{5}{6}$ or $y(0) = 1$

donc $C_1 + C_2 = \frac{11}{6}$

Par ailleurs $y'(t) = \frac{-7}{4}C_1 e^{\frac{-7}{4}t} + C_2 e^t + \frac{5}{6}e^{-t}$ donc $y'(0) = \frac{-7}{4}C_1 + C_2 + \frac{5}{6}$

or $y'(0) = 0$ donc $\frac{-7}{4}C_1 + C_2 + \frac{5}{6} = 0$

On dispose alors du système $\begin{cases} C_1 + C_2 = \frac{11}{6} \\ \frac{-7}{4}C_1 + C_2 = \frac{-5}{6} \end{cases}$

On dispose alors du système $\begin{cases} C_1 + C_2 = \frac{11}{6} \\ C_2 = \frac{19}{22} \end{cases}$

Puis $C_1 = \frac{32}{33}$ en reportant dans la première équation

Finalement l'unique solution du problème est $y(t) = \frac{32}{33}e^{\frac{-7}{4}t} + \frac{19}{22}e^t - \frac{5}{6}e^{-t}$

5. $f(t) = \cos(2t)$

Etape 1 : voir la question 1)

Etape 2 : On recherche une solution particulière de l'équation complète.

Le second membre est un $\cos(2t)$

donc on recherche une solution particulière y_p sous la forme $y_p(t) = A\cos(2t) + B\sin(2t)$

donc $y_p'(t) = -2A\sin(2t) + 2B\cos(2t)$ puis $y_p''(t) = -4A\cos(2t) - 4B\sin(2t)$

L'équation devient :

$4(-4A\cos(2t) - 4B\sin(2t)) + 3(-2A\sin(2t) + 2B\cos(2t)) - 7(A\cos(2t) + B\sin(2t)) = \cos(2t)$

donc en ordonnant les termes :

$$(-23A + 6B)\cos(2t) + (-23B - 6A)\sin(2t) = 1\cos(2t) + 0\sin(2t)$$

on peut alors identifier les termes en t, cela donne : $-23A + 6B = 1$ et $-23B - 6A = 0$

donc $\begin{cases} -23A + 6B &= 1 \\ -6A - 23B &= 0 \end{cases}$ donc $\begin{cases} -6A - 23B &= 0 \\ -565B &= -6 \end{cases}$

donc $B = \dfrac{6}{565}$ puis $A = \dfrac{-23}{565}$

Une solution particulière de l'équation avec second membre est alors

$$y_p(t) = \frac{1}{565}(-23\cos(2t) + 6\sin(2t))$$

Etape 3 : y est une solution de l'équation équivaut à $y - y_p$ est une solution de (SSM) donc toutes les solutions de l'équation complète sont les sommes :

$$y(t) = C_1 e^{\frac{-7}{4}t} + C_2 e^t + \frac{1}{565}(-23\cos(2t) + 6\sin(2t))$$

Etape 4 : On détermine l'unique solution correspondant aux conditions initiales.

On a : $y(t) = C_1 e^{\frac{-7}{4}t} + C_2 e^t + \dfrac{1}{565}(-23\cos(2t) + 6\sin(2t))$donc $y(0) = C_1 + C_2 - \dfrac{23}{565}$

Or $y(0) = 1$ donc $C_1 + C_2 = \dfrac{588}{565}$

Par ailleurs $y'(t) = \frac{-7}{4} C_1 e^{\frac{-7}{4}t} + C_2 e^t + \dfrac{2}{565}(23\sin(2t) + 6\cos(2t))$ donc $y'(0) = \frac{-7}{4} C_1 + C_2 + \frac{6}{565}$

or $y'(0) = 0$ donc $\frac{-7}{4} C_1 + C_2 = -\frac{6}{565}$

On dispose alors du système $\begin{cases} C_1 + C_2 = \dfrac{588}{565} \\ \frac{-7}{4} C_1 + C_2 = -\frac{6}{565} \end{cases}$

Puis, par différence, on a : $\begin{cases} C_1 + C_2 = \dfrac{588}{565} \\ \frac{11}{4} C_1 = \frac{594}{565} \end{cases}$

Donc $C_1 = \dfrac{480}{1243}$ puis $C_2 = \dfrac{36}{55}$

L'unique solution du problème est alors :

$y(t) = \dfrac{480}{1243} e^{\frac{-7}{4}t} + \dfrac{36}{55} e^t + \dfrac{1}{565}(-23\cos(2t) + 6\sin(2t))$

6. $f(t) = 4e^t$

Etape 1 : voir la question 1)

Etape 2 : On recherche une solution particulière de l'équation complète.

Le second membre est de la forme e^{mt} mais m est l'une des racines de l'équation caractéristique

donc on recherche une solution particulière sous la forme d'une constante $y_p(t) = Kte^t$

Dans ce cas $y_p'(t) = Ke^t + Kte^t$

Puis $y_p''(t) = 2Ke^t + Kte^t$

L'équation devient : $4\left(2Ke^t + Kte^t\right) + 3\left(Ke^t + Kte^t\right) - 7Kte^t = 4e^t$

Simplifions par l'exponentielle, il reste : $8K + 3K = 4$

C'est à dire : $11K = 4$ donc $K = \frac{4}{11}$

Une solution particulière de l'équation avec second membre est alors $y_p(t) = \frac{4}{11} te^t$

Etape 3 : y est une solution de l'équation équivaut à $y - y_p$ est une solution de (SSM) donc toutes les solutions de l'équation complète sont les sommes :

$$y(t) = C_1 e^{\frac{-7}{4}t} + C_2 e^t + \tfrac{4}{11} te^t$$

Etape 4 : On détermine l'unique solution correspondant aux conditions initiales.

On a : $y(t) = C_1 e^{\frac{-7}{4}t} + C_2 e^t + \frac{4}{11} te^t$

$y(0) = C_1 + C_2$ or $y(0) = 1$

donc $C_1 + C_2 = 1$

Par ailleurs $y'(t) = \frac{-7}{4}C_1 e^{\frac{-7}{4}t} + C_2 e^t + \frac{4}{11}e^t + \frac{4}{11}te^t$

donc $y'(0) = \frac{-7}{4}C_1 + C_2 + \frac{4}{11}$ or $y'(0) = 0$

donc $\frac{-7}{4}C_1 + C_2 = \frac{-4}{11}$

On dispose alors du système $\begin{cases} C_1 + C_2 = 1 \\ \frac{-7}{4}C_1 + C_2 = \frac{-4}{11} \end{cases}$

On dispose alors du système $\begin{cases} C_1 + C_2 = 1 \\ C_2 = \frac{61}{121} \end{cases}$

Puis $C_1 = \frac{60}{121}$ en reportant dans la première équation

Finalement l'unique solution du problème est $y(t) = \frac{60}{121}e^{\frac{-7}{4}t} + \frac{61}{121}e^t + \frac{4}{11}te^t$