1. Déterminer les réels A, B et C tels que : $f(x) = \dfrac{x}{(x+9)(x-2)^2} = \dfrac{A}{x+9} + \dfrac{B}{x-2} + \dfrac{C}{(x-2)^2}$

   Pour obtenir A, on calcule $\lim\limits_{x\to -9}(x+9)f(x) = \dfrac{-9}{121} = A + 0 + 0$ donc $A = \dfrac{-9}{121}$

   Pour obtenir C, on calcule $\lim\limits_{x\to 2}(x-2)^2 f(x) = \dfrac{2}{11} = 0 + 0 + C$ donc $C = \dfrac{2}{11}$

   Pour obtenir B, on calcule $f(3) = \dfrac{1}{4} = \dfrac{A}{12} + B + C$ donc $B = \dfrac{1}{4} - C + \dfrac{3}{484} = \dfrac{9}{121}$

2. De déduire une primitive de f sur $]-2;+\infty[$

   Puisque $f(x) = \dfrac{x}{(x+9)(x-2)^2} = \dfrac{-9}{121}\dfrac{1}{x+9} + \dfrac{9}{121}\dfrac{1}{x-2} + \dfrac{2}{11}\dfrac{1}{(x-2)^2}$

   Une primitive de f est $F(x) = \dfrac{-9}{121}\ln(x+9) + \dfrac{9}{121}\ln(x-2) - \dfrac{2}{11}\dfrac{-1}{x-2}$

   que l'on peut noter : $F(x) = \dfrac{9}{121}\ln\dfrac{x-2}{x+9} - \dfrac{2}{11}\dfrac{1}{x-2}$

   En effet $(\ln u)' = \dfrac{u'}{u}$ *et* $\left(\dfrac{1}{u}\right)' = \dfrac{-u'}{u^2}$. *Par ailleurs* $\ln A - \ln B = \ln \frac{A}{B}$

3. Calculer alors $\displaystyle\int_3^4 f(x)\mathrm{d}x$

   $$\int_3^4 f(x)\mathrm{d}x = \left[\frac{9}{121}\ln\frac{x-2}{x+9} - \frac{2}{11}\frac{1}{x-2}\right]_3^4$$

   $$= \left(\frac{9}{121}\ln\frac{4-2}{4+9} - \frac{2}{11}\frac{1}{4-2}\right) - \left(\frac{9}{121}\ln\frac{3-2}{3+9} - \frac{2}{11}\frac{1}{3-2}\right)$$

   $$= \frac{9}{121}\ln\frac{2}{13} - \frac{1}{11} \quad + \quad \frac{9}{121}\ln 12 \quad + \quad \frac{2}{11}$$

   $$= \frac{9}{121}\ln\frac{24}{13} + \frac{1}{11}$$