Résoudre l'équation différentielle : $5\dfrac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t} + y(t) = f(t)$ et $y(0) = 2$ lorsque :

1. $f(t) = 0$

   Etape 1 : On recherche toutes les solutions de l'équation homogène associée.

   $a = 5$ et $b = 1$ donc $F'(t) = \dfrac{b}{a} = \frac{1}{5}$

   Une primitive est alors $F(t) = \frac{1}{5}t + 0$

   Toutes les solutions sont les $y(t) = Ce^{-F(t)} = Ce^{\frac{-1}{5}t}$ où C est une constante réelle quelconque.

   Etape 2 : On détermine l'unique solution correspondant à la condition initiale.

   Puisque $y(0) = 2$ on a : $2 = Ce^0$ donc $C = 2$

   L'unique solution du problème est alors $\boxed{y(t) = 2e^{\frac{-1}{5}t}}$

2. $f(t) = t + 4$

   Etape 1 : On recherche toutes les solutions de l'équation homogène associée.

   $a = 5$ et $b = 1$ donc $F'(t) = \dfrac{b}{a} = \frac{1}{5}$

   Une primitive est alors $F(t) = \frac{1}{5}t + 0$

   Toutes les solutions sont les $y(t) = Ce^{-F(t)} = Ce^{\frac{-1}{5}t}$ où C est une constante réelle quelconque.

   Etape 2 : On recherche une solution particulière de l'équation complète.

   Le second membre est une fonction affine

   donc on recherche une solution particulière y_p sous la forme d'une fonction affine.

   Dans ce cas $y_p(t) = At + B$ donc $y_p'(t) = A$

   L'équation devient : $5A + (At + B) = t + 4$ puis $At + 5A + B = t + 4$

   On peut alors identifier, les termes en t ensemble et les termes constants ensemble

   $$\begin{cases} A & = & 1 \\ 5A + B & = & 4 \end{cases}$$

   donc $A = 1$ puis $B = -1$

   Une solution particulière de l'équation avec second membre est alors $y_p(t) = t - 1$

   Etape 3 : y est une solution de l'équation équivaut à $y - y_p$ est une solution de (SSM)

   donc toutes les solutions de l'équation complète sont les sommes : $y(t) = Ce^{\frac{-1}{5}t} + t - 1$

   Etape 4 : Puisque $y(0) = 2$ on a : $2 = Ce^0 + 0 - 1$ donc $C = 3$

   L'unique solution du problème différentiel est : $\boxed{y(t) = 3e^{\frac{-1}{5}t} + t - 1}$

3. $f(t) = t^4 e^{-0.2t}$

Etape 1 : On recherche toutes les solutions de l'équation homogène associée.

$a = 5$ et $b = 1$ donc $F'(t) = \dfrac{b}{a} = \frac{1}{5}$

Une primitive est alors $F(t) = \frac{1}{5}t + 0$

Toutes les solutions sont les $y(t) = Ce^{-F(t)} = Ce^{\frac{-1}{5}t}$ où C est une constante réelle quelconque.

Etape 2 : On recherche une solution particulière de l'équation complète.

Le second membre comporte une exponentielle présente dans les solutions de l'étape précédente

donc on recherche une solution particulière y_p exponentielle sous la forme $y_p(t) = P(t) \times e^{\frac{-1}{5}t}$

Dans ce cas $y_p'(t) = P'(t)e^{\frac{-1}{5}t} - \frac{1}{5}P(t)e^{\frac{-1}{5}t}$

L'équation devient : $5P'(t)e^{\frac{-1}{5}t} - P(t)e^{\frac{-1}{5}t} + P(t)e^{\frac{-1}{5}t} = te^{\frac{-1}{5}t}$

puis $5P'(t)e^{\frac{-1}{5}t} = te^{\frac{-1}{5}t}$

donc $P'(t) = \frac{1}{5}t$

donc $P(t) = \frac{1}{10}t^2 + 0$ convient.

Une solution particulière de l'équation avec second membre est alors $y_p(t) = \frac{1}{10}t^2 e^{\frac{-1}{5}t}$

Etape 3 : y est une solution de l'équation équivaut à $y - y_p$ est une solution de (SSM) donc toutes les solutions de l'équation complète sont les sommes : $y(t) = Ce^{\frac{-1}{5}t} + \frac{1}{10}t^2 e^{\frac{-1}{5}t}$

Etape 4 : Puisque $y(0) = 2$ on a : $2 = Ce^0 + 0$ donc $C = 2$

L'unique solution du problème différentiel est : $\boxed{y(t) = 2e^{\frac{-1}{5}t} + \frac{1}{10}t^2 e^{\frac{-1}{5}t}}$