[RAPIDE]

Résoudre l'équation différentielle : $-2y' + 3y = 4\cos(2t)$ sachant que $y(0) = 1$

On cherchera une solution particulière sous la forme $y(t) = A\cos(2t) + B\sin(2t)$

Etape 1 : On recherche toutes les solutions de l'équation homogène associée.

$a = -2$ et $b = 3$ donc $F'(t) = \dfrac{b}{a} = \frac{-3}{2}$

Une primitive est alors $F(t) = \frac{-3}{2}t + 0$

Toutes les solutions sont les $y(t) = Ce^{-F(t)} = Ce^{\frac{3}{2}t}$ où C est une constante réelle quelconque.

Etape 2 : On recherche une solution particulière de l'équation complète.

Le second membre est une fonction cosinus donc on recherche une solution particulière y_p sous la forme

$y_p(t) = A\cos(2t) + B\sin(2t)$ donc $y_p'(t) = -2A\sin(2t) + 2B\cos(2t)$

L'équation devient : $-2\Big(-2A\sin(2t) + 2B\cos(2t)\Big) + 3\Big(A\cos(2t) + B\sin(2t)\Big) = 4\cos(2t)$
puis $\Big(-4B + 3A\Big)\cos(2t) + \Big(4A + 3B\Big)\sin(2t) = 4\cos(2t) + 0\sin(2t)$

On peut alors identifier, les termes en cosinus ensemble et les termes en sinus ensemble

$$\begin{cases} 3A - 4B &= 4 \\ 4A + 3B &= 0 \end{cases} \text{ donc } -4A = 3B \text{ puis } A = \frac{-3}{4}B$$

puis en renvoyant dans l'autre équation, on a : $\frac{-9}{4}B - 4B = 4$ donc $\frac{-25}{4}B = 4$ donc $B = \frac{-16}{25}$

Et enfin $A = \frac{-3}{4} \times B = \frac{12}{25}$

Une solution particulière de l'équation avec second membre est alors $y_p(t) = \frac{12}{25}\cos(2t) - \frac{16}{25}\sin(2t)$

Etape 3 : y est une solution de l'équation équivaut à $y - y_p$ est une solution de (SSM)

donc toutes les solutions de l'équation complète sont les sommes :

$$y(t) = Ce^{\frac{3}{2}t} + \frac{12}{25}\cos(2t) - \frac{16}{25}\sin(2t)$$

Etape 4 : Puisque $y(0) = 1$ on a : $1 = Ce^0 + \frac{12}{25} + 0$ donc $C = \frac{13}{25}$

L'unique solution du problème différentiel est : $\boxed{y(t) = \frac{13}{25}e^{\frac{3}{2}t} + \frac{12}{25}\cos(2t) - \frac{16}{25}\sin(2t)}$