On considère la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = (x^2 - 1)e^{-3x}$

1. Déterminer $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$

   On a : $\lim\limits_{x \to -\infty} x^2 - 1 = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} e^{-3x} = +\infty$ donc par produit $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$

   Par ailleurs, on a : $f(x) = x^2 e^{-3x} - e^{-3x}$

   or $\lim\limits_{x \to +\infty} x^2 e^{-3x} = 0$ par croissances comparées de x^2 et de e^{-3x} au voisinage de $+\infty$

   et $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{-3x} = 0$ donc par différence $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$

2. Calculer $f'(x)$ et en déduire les variations de f

   Puisque $f(x) = (x^2 - 1) \times e^{-3x}$ on a :

   $f'(x) = 2xe^{-3x} + (x^2 - 1)(-3)e^{-3x} = e^{-3x} \times (2x - 3x^2 + 3) = e^{-3x} \times (-3x^2 + 2x + 3)$

   $\Delta = 4 + 36 = 40 > 0$, il y deux solutions $x_1 = \frac{-2-\sqrt{40}}{2\times -3} = \frac{1+\sqrt{10}}{3}$ et $x_2 = \frac{-2+\sqrt{40}}{2\times -3} = \frac{1-\sqrt{10}}{3}$

x	$-\infty$		x_2		x_1		$+\infty$
$-3x^2+2x+3$		$-$	0	$+$	0	$-$	
e^{-3x}		$+$		$+$		$+$	
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$f(x_2)$	$\nearrow$	$f(x_1)$	$\searrow$	0

3. Montrer que f admet un maximum relatif, donner ses coordonnées.

   f est continue sur $\mathbb{R}$ et strictement croissante sur $]x_2; x_1[$ puis strictement décroissante sur $]x_1; +\infty[$ donc f admet en x_1 un maximum relatif. Sa valeur est $f(x_1) \approx 0,0144$

4. Déterminer les réels a, b et c tels que $F(x) = (ax^2 + bx + c)e^{-3x}$ soit une primitive de f sur $\mathbb{R}$

   F est une primitive de f si $F' = f$

   Or $F'(x) = (2ax + b)e^{-3x} + (ax^2 + bx + c)(-3)e^{-3x} = \Big(-3ax^2 + (2a - 3b)x + b - 3c\Big)e^{-3x}$

   et $f(x) = (x^2 + 0x - 1)e^{-3x}$

   donc par identification : $-3a = 1$ donc $a = \dfrac{-1}{3}$ puis $2a - 3b = 0$ donc $b = \dfrac{2a}{3} = \dfrac{2}{9}$

   et enfin $b - 3c = -1$ donc $c = \dfrac{7}{27}$

   Finalement : $F(x) = \dfrac{-1}{27}(9x^2 + 6x - 7)e^{-3x}$

5. Calculer la valeur exacte de $\displaystyle\int_1^3 f(x)\mathrm{d}x$

   On a : $\displaystyle\int_1^3 f(x)\mathrm{d}x = \Big[F(x)\Big]_1^3 = F(3) - F(1) = \frac{-92}{27}e^{-9} + \frac{8}{27}e^{-3} \approx 0,0143$