Déterminer les valeurs de A, B et C pour que :

1. $\dfrac{x+2}{x(x+1)(x-1)} = \dfrac{A}{x} + \dfrac{B}{x+1} + \dfrac{C}{x-1}$

   • Pour trouver A associé à x, on multiplie l'égalité par x puis on simplifie puis on fait tendre x vers 0, cela donne :

   $\dfrac{x(x+2)}{x(x+1)(x-1)} = \dfrac{Ax}{x} + \dfrac{Bx}{x+1} + \dfrac{Cx}{x-1}$ puis $\dfrac{x+2}{(x+1)(x-1)} = A + \dfrac{Bx}{x+1} + \dfrac{Cx}{x-1}$

   puis $-2 = A + 0 + 0$ donc $A = -2$

   • Pour trouver B associé à $x+1$, on multiplie l'égalité par $(x+1)$ puis on simplifie puis on fait tendre x vers -1, cela donne :

   $\dfrac{(x+1)(x+2)}{x(x+1)(x-1)} = \dfrac{A(x+1)}{x} + \dfrac{B(x+1)}{x+1} + \dfrac{C(x+1)}{x-1}$

   puis $\dfrac{x+2}{x(x-1)} = \dfrac{A(x+1)}{x} + B + \dfrac{C(x+1)}{x-1}$ puis $\dfrac{1}{2} = 0 + B + 0$ donc $B = \frac{1}{2}$

   • Pour trouver C associé à $x-1$, on multiplie l'égalité par $(x-1)$ puis on simplifie puis on fait tendre x vers 1, cela donne :

   $\dfrac{(x-1)(x+2)}{x(x+1)(x-1)} = \dfrac{A(x-1)}{x} + \dfrac{B(x-1)}{x+1} + \dfrac{C(x-1)}{x-1}$

   puis $\dfrac{x+2}{x(x+1)} = \dfrac{A(x-1)}{x} + \dfrac{B(x-1)}{x+1} + C$ puis $\dfrac{3}{2} = 0 + 0 + C$ donc $C = \frac{3}{2}$

2. $\dfrac{1}{p^2(p+3)} = \dfrac{A}{p^2} + \dfrac{B}{p} + \dfrac{C}{p+3}$

   • Pour trouver A associé à p^2, on multiplie l'égalité par p^2 puis on simplifie puis on fait tendre p vers 0, cela donne :

   $\dfrac{p^2}{p^2(p+3)} = \dfrac{Ap^2}{p^2} + \dfrac{Bp^2}{p} + \dfrac{Cp^2}{p+3}$ puis $\dfrac{1}{p+3} = A + Bp + \dfrac{Cp^2}{p+3}$

   puis $A = \frac{1}{3}$

   • Pour trouver C associé à $p+3$, on multiplie l'égalité par $(p+3)$ puis on simplifie puis on fait tendre p vers -3, cela donne :

   $\dfrac{p+3}{p^2(p+3)} = \dfrac{A(p+3)}{p^2} + \dfrac{B(p+3)}{p} + \dfrac{C(p+3)}{p+3}$ puis $\dfrac{1}{p^2} = \dfrac{A(p+3)}{p^2} + \dfrac{B(p+3)}{p} + C$

   puis $C = \frac{1}{9}$

   • Pour trouver B associé à p, on multiplie l'égalité par p puis on simplifie puis on fait tendre p vers $+\infty$, cela donne :

   $\dfrac{p}{p^2(p+3)} = \dfrac{Ap}{p^2} + \dfrac{Bp}{p} + \dfrac{Cp}{p+3}$ puis $\dfrac{1}{p(p+3)} = \dfrac{A}{p} + B + \dfrac{Cp}{p+3}$

   puis $0 = 0 + B + C$ donc $B = -\frac{1}{9}$ *en effet* $\dfrac{Cp}{p+3} = \dfrac{C}{1+\frac{3}{p}} \xrightarrow[p \to +\infty]{} C$

3. $\dfrac{12}{z(z^2+1)} = \dfrac{A}{z} + \dfrac{Bz+C}{z^2+1}$

• Pour trouver A associé à z, on multiplie l'égalité par z puis on simplifie puis on fait tendre z vers 0, cela donne :

$\dfrac{12z}{z(z^2+1)} = \dfrac{Az}{z} + \dfrac{Bz^2+Cz}{z^2+1}$ puis $\dfrac{12}{z^2+1} = A + \dfrac{Bz^2+Cz}{z^2+1}$ puis $A = 12$

• Pour trouver B et C associés à z^2+1, on multiplie l'égalité par z puis on simplifie puis on fait tendre z vers i, cela donne :

$\dfrac{12(z^2+1)}{z(z^2+1)} = \dfrac{A(z^2+1)}{z} + \dfrac{(Bz+C)(z^2+1)}{z^2+1}$ puis $\dfrac{12}{z} = \dfrac{A(z^2+1)}{z} + Bz + C$

puis $\dfrac{12}{i} = Bi + C$ or $\dfrac{12}{i} = \dfrac{12i}{i^2} = -12i$

donc $C + iB = -12i = 0 + (-12)i$ donc $C = 0$ et $B = -12$