1. Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes l'équation (E) d'inconnue z : $z^2 - 8z + 64 = 0$.

   C'est une équation du second degré $\Delta = -192 < 0$, il y a deux racines complexes conjuguées $z = \dfrac{8\pi 8i\sqrt{3}}{2} = 4 \pm 4i\sqrt{3}$

2. On considère les points A, B et C d'affixes respectives $a = 4 + 4\mathrm{i}\sqrt{3}$, $b = 4 - 4\mathrm{i}\sqrt{3}$ et $c = 8\mathrm{i}$.

   (a) Calculer le module et un argument du nombre a.

   $|a| = |4 + 4i\sqrt{3}| = \sqrt{16 + 48} = \sqrt{64} = 8$ puis en notant θ un argument de a, on a : $\cos\theta = \dfrac{4}{8} = \dfrac{1}{2}$ donc $\theta = \pm\dfrac{\pi}{3}$ or $\sin\theta = \dfrac{4\sqrt{3}}{8} > 0$ donc $\theta = +\dfrac{\pi}{3}$

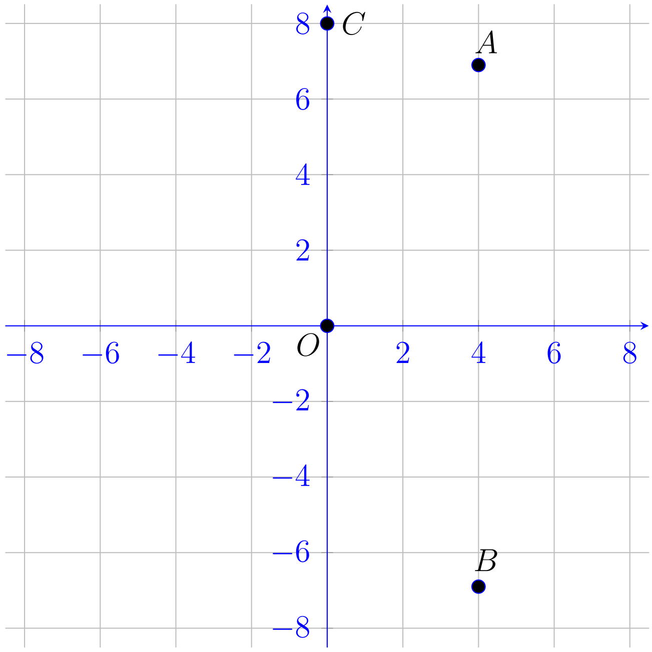
   (b) Donner la forme exponentielle des nombres a et b.

   On a : $a = 8e^{i\pi/3}$ et $b = \bar{a}$ donc $b = 8e^{-i\pi/3}$

   (c) Montrer que les points A, B et C sont sur un même cercle ce de centre O dont on déterminera le rayon.

   On a déjà $OA = |a| = 8 = |b| = OB$ et $OC = |c| = |8i| = 8$ donc $OA = OB = OC$ les trois points sont situé sur le même centre de centre O et de rayon 8.

   (d) Placer les points A, B et C dans le repère $\left(\mathrm{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$.



Pour la suite de l'exercice, on pourra s'aider de la figure de la question **2. d.** complétée au fur et à mesure de l'avancement des questions.

3. On considère les points A′, B′ et C′ d'affixes respectives $a' = a\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}$, $b' = b\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}$ et $c' = c\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}$.

   (a) Montrer que $b' = 8$.

   $b' = b\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}} = 8e^{-i\pi/3} \times \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}} = 8e^{0} = 8$

   (b) Calculer le module et un argument du nombre a'.

   $a' = a\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}} = 8e^{i\pi/3} \times \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}} = 8 \times \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}$

   donc a' a pour module 8 et pour argument $\frac{2\pi}{3}$

   Pour la suite on admet que $a' = -4 + 4\mathrm{i}\sqrt{3}$ et $c' = -4\sqrt{3} + 4\mathrm{i}$.

4. On admet que si M et N sont deux points du plan d'affixes respectives m et n alors le milieu I du segment $[MN]$ a pour affixe $\dfrac{m+n}{2}$ et la longueur MN est égale à $|n-m|$.

   (a) On note r, s et t les affixes des milieux respectifs R, S et T des segments [A′B], [B′C] et [C′A].

   Calculer r et s. On admet que $t = 2 - 2\sqrt{3} + \mathrm{i}\left(2 + 2\sqrt{3}\right)$.

   On a : $r = \dfrac{a'+b}{2} = \dfrac{-4+4i\sqrt{3}+4-4i\sqrt{3}}{2} = \dfrac{0}{2} = 0$

   et $s = \dfrac{b'+c}{2} = \dfrac{8+8i}{2} = \dfrac{0}{2} = 4+4i$

   (b) Quelle conjecture peut-on faire quant à la nature du triangle RST ? Justifier ce résultat.

   En le dessinant on peut émettre la conjecture suivante : il est équilatéral.

   On a : $RS = |s| = \sqrt{4+4i} = 4\sqrt{2}$,

   $RT = |t| = |2 - 2\sqrt{3} + \mathrm{i}\left(2+2\sqrt{3}\right)|$

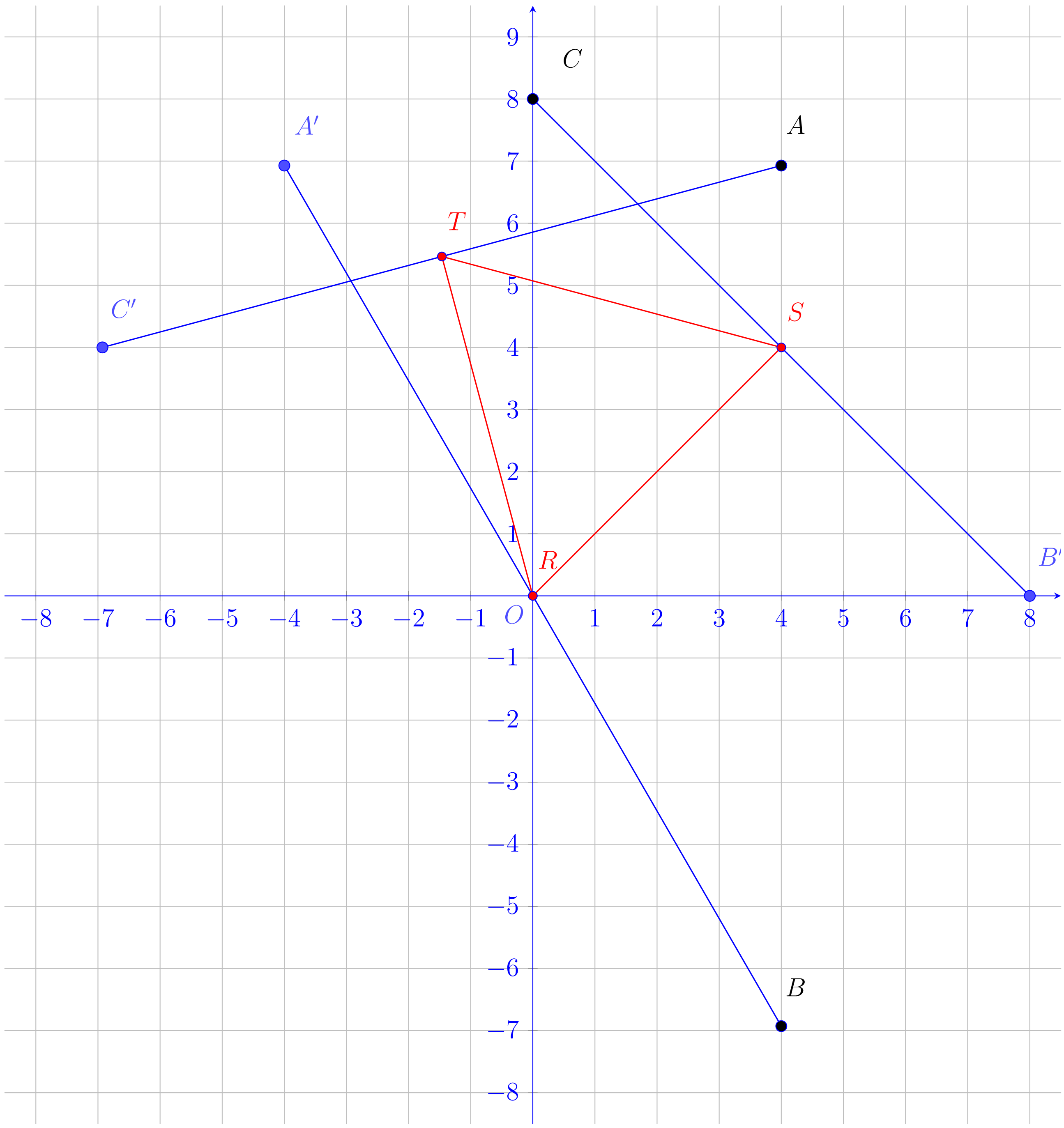
   $= \sqrt{\left(2+2\sqrt{3}\right)^2 + \left(2+2\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{4+12+8\sqrt{3}+4+12-8\sqrt{12}} = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$

   et enfin $ST = |t-s| = |-2-2\sqrt{3}+\mathrm{i}\left(-2+2\sqrt{3}\right)|$

   $= \sqrt{\left(-2+2\sqrt{3}\right)^2 + \left(-2+2\sqrt{3}\right)^2}$

   $= \sqrt{4+12-8\sqrt{3}+4+12+8\sqrt{12}} = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$

   Puisque $RT = RS = RS$ le triangle RST est bien équilatéral.


C
A
A′
T
C′
S
R
O
B′
B
−8 −7 −6 −5 −4 −3 −2 −1 1 2 3 4 5 6 7 8
9 8 7 6 5 4 3 2 1 −1 −2 −3 −4 −5 −6 −7 −8