[Rapide]

Déterminer les valeurs de A, B et C pour que :

1) $$\frac{x^2+1}{(x+2)^2(x-3)} = \frac{A}{(x+2)^2} + \frac{B}{x+2} + \frac{C}{x-3}$$

• Pour trouver A associé à $(x+2)^2$, on multiplie l'égalité par $(x+2)^2$ puis on simplifie puis on fait tendre x vers -2, cela donne :

$$\frac{(x^2+1)(x+2)^2}{(x+2)^2(x-3)} = \frac{A(x+2)^2}{(x+2)^2} + \frac{B(x+2)^2}{x+2} + \frac{C(x+2)^2}{x-3} \text{ puis } \frac{x^2+1}{x-3} = A + B(x+2) + \frac{C(x+2)^2}{x-3}$$

puis $\frac{5}{-5} = A + 0 + 0$ donc $A = -1$

• Pour trouver C associé à $x-3$, on multiplie l'égalité par $(x-3)$ puis on simplifie puis on fait tendre x vers 3, cela donne :

$$\frac{(x^2+1)(x-3)}{(x+2)^2(x-3)} = \frac{A(x-3)}{(x+2)^2} + \frac{B(x-3)}{x+2} + \frac{C(x-3)}{x-3} \text{ puis } \frac{x^2+1}{(x+2)^2} = \frac{A(x-3)}{(x+2)^2} + \frac{B(x-3)}{x+2} + C$$

puis $\frac{10}{25} = 0 + 0 + C$ donc $C = \frac{2}{5}$

• Pour trouver B associé à $x+2$, on donne à x la valeur -1, cela donne :

$\frac{2}{-4} = A + B + \frac{C}{-4}$ donc $B = -\frac{1}{2} + 1 + \frac{1}{10} = \frac{3}{5}$

2) $$\frac{p}{(p^2+1)(p+1)} = \frac{Ap+B}{p^2+1} + \frac{C}{p+1}$$

• Pour trouver A et B associés à (p^2+1), on multiplie l'égalité par (p^2+1) puis on simplifie puis on fait tendre p vers i, cela donne :

$$\frac{p(p^2+1)}{(p^2+1)(p-1)} = \frac{(Ap+B)(p^2+1)}{p^2+1} + \frac{C(p^2+1)}{p+1} \text{ puis } \frac{p}{p-1} = Ai + B + \frac{C(p^2+1)}{p+1}$$

puis $\frac{i}{i+1} = Ai + B$ or $\frac{i}{i+1} = \frac{i(1-i)}{(1+i)(1-i)} = \frac{1+i}{2}$ donc $B + Ai = \frac{1}{2} + i\frac{1}{2}$ donc $A = B = \frac{1}{2}$

• Pour trouver C associé à $p+1$, on multiplie l'égalité par $(p+1)$ puis on simplifie puis on fait tendre p vers -1, cela donne :

$$\frac{p(p+1)}{(p^2+1)(p+1)} = \frac{(Ap+B)(p+1)}{p^2+1} + \frac{C(p+1)}{p+1} \text{ puis } \frac{p}{p^2+1} = \frac{(Ap+B)(p+1)}{p^2+1} + C$$

puis $\frac{-1}{2} = 0 + 0 + C$ donc $C = -\frac{1}{2}$

3) $\dfrac{5}{z(2z+1)(z-3)} = \dfrac{A}{z} + \dfrac{B}{z+\frac{1}{2}} + \dfrac{C}{z-3}$

• Pour trouver A associé à z, on multiplie l'égalité par z puis on simplifie puis on fait tendre z vers 0, cela donne :

$\dfrac{5z}{z(2z+1)(z-3)} = \dfrac{Az}{z} + \dfrac{Bz}{z+\frac{1}{2}} + \dfrac{Cz}{z-3}$ puis $\dfrac{5}{(2z+1)(z-3)} = A + \dfrac{Bz}{z+\frac{1}{2}} + \dfrac{Cz}{z-3}$

puis $\dfrac{5}{-3} = A + 0 + 0$ donc $A = -\dfrac{5}{3}$

• Pour trouver B associé à $z+\frac{1}{2}$, on multiplie l'égalité par $(z+\frac{1}{2})$ puis on simplifie puis on fait tendre z vers $-\frac{1}{2}$, cela donne :

$\dfrac{5(z+\frac{1}{2})}{z(2z+1)(z-3)} = \dfrac{A(z+\frac{1}{2})}{z} + \dfrac{B(z+\frac{1}{2})}{z+\frac{1}{2}} + \dfrac{C(z+\frac{1}{2})}{z-3}$

puis

$\dfrac{5}{2z(z-3)} = \dfrac{A(z+\frac{1}{2})}{z} + B + \dfrac{C(z+\frac{1}{2})}{z-3}$ car $(2z+1) = 2(z+\frac{1}{2})$

puis $\dfrac{5}{\frac{7}{2}} = 0 + B + 0$ donc $B = \dfrac{10}{7}$

• Pour trouver C associé à $z-3$, on multiplie l'égalité par $(z-3)$ puis on simplifie puis on fait tendre z vers 3, cela donne :

$\dfrac{5(z-3)}{z(2z+1)(z-3)} = \dfrac{A(z-3)}{z} + \dfrac{B(z-3)}{z+\frac{1}{2}} + \dfrac{C(z-3)}{z-3}$ puis $\dfrac{5}{z(2z+1)} = \dfrac{A(z-3)}{z} + \dfrac{B(z-3)}{z+\frac{1}{2}} + C$

puis $\dfrac{5}{21} = 0 + 0 + C$ donc $C = \dfrac{5}{21}$