Déterminer les valeurs de A, B et C pour que :

1. $\dfrac{x+1}{(x+2)(x-3)} = \dfrac{A}{x+2} + \dfrac{B}{x-3}$

   Pour trouver A, associé à $(x+2)$ on multiplie $G(x)$ par $(x+2)$ on simplifie et on fait tendre x vers -2

   On obtient : $(x+2)G(x) = \dfrac{(x+1)(x+2)}{(x+2)(x-3)} = \dfrac{A(x+2)}{x+2} + \dfrac{B(x+2)}{x-3}$

   puis $(x+2)G(x) = \dfrac{x+1}{x-3} = A + \dfrac{B(x+2)}{x-3}$

   et enfin $\lim\limits_{x \to -2} (x+2)G(x) = \dfrac{-1}{-5} = A + 0$ donc $\boxed{A = \frac{1}{5}}$

   Pour trouver B, associé à $(x-3)$ on multiplie $G(x)$ par $(x-3)$ on simplifie et on fait tendre x vers 3

   On obtient : $(x-3)G(x) = \dfrac{(x+1)(x-3)}{(x+2)(x-3)} = \dfrac{A(x-3)}{x+2} + \dfrac{B(x-3)}{x-3}$

   puis $(x-3)G(x) = \dfrac{x+1}{x+2} = \dfrac{A(x-3)}{x+2} + B$

   et enfin $\lim\limits_{x \to 3} (x-3)G(x) = \dfrac{4}{5} = 0 + B$ donc $\boxed{B = \frac{4}{5}}$

   On a établi que : $\boxed{G(x) = \dfrac{x+1}{(x+2)(x-3)} = \dfrac{\frac{1}{5}}{x+2} + \dfrac{\frac{4}{5}}{x-3}}$

2. $\dfrac{p+3}{(p^2+4)(p+1)} = \dfrac{Ap+B}{p^2+4} + \dfrac{C}{p+1}$

   Pour trouver C, associé à $(p+1)$ on multiplie $G(p)$ par $(p+1)$ on simplifie et on fait tendre p vers -1

   On obtient : $(p+1)G(p) = \dfrac{(p+3)(p+1)}{(p+1)(p^2+4)} = \dfrac{(Ap+B)(p+1)}{p^2+4} + \dfrac{C(p+1)}{p+1}$

   puis $(p+1)G(p) = \dfrac{p+3}{p^2+4} = \dfrac{(Ap+B)(p+1)}{p^2+4} + C$

   et enfin $\lim\limits_{p \to -1} (p+1)G(p) = \dfrac{2}{5} = 0 + C$

   donc $\boxed{C = \frac{2}{5}}$

   Pour trouver A et B, associés à (p^2+4) on multiplie $G(p)$ par (p^2+4) on simplifie et on fait tendre p vers $2i$

On obtient : $(p^2+4)G(p) = \dfrac{(p+3)(p^2+4)}{(p^2+4)(p+1)} = \dfrac{(Ap+B)(p^2+4)}{p+1} + \dfrac{C(p^2+4)}{p+1}$

donc $(p^2+4)G(p) = \dfrac{p+3}{p+1} = Ap + B + \dfrac{C(p^2+4)}{p+1}$

donc $\dfrac{2i+3}{2i+1} = A2i + B + 0 = B + A2i$

or $\dfrac{2i+3}{2i+1} = \dfrac{2i+3}{2i+1} \times \dfrac{-2i+1}{-2i+1} = \dfrac{7-4i}{5} = \frac{7}{5} - \frac{4}{5}i$

donc $B = \frac{7}{5}$ en identifiant les parties réelles

et $A = \frac{-2}{5}$ en identifiant les parties imaginaires

Une autre méthode :

Si on connaît déjà C alors

On a : $G(0) = \dfrac{3}{4} = \dfrac{B}{4} + \dfrac{C}{1}$ or $C = \dfrac{2}{5}$

donc $\dfrac{B}{4} = \dfrac{4}{4} - \dfrac{\frac{2}{5}}{1}$

donc $B = \boxed{\frac{7}{5}}$ et $G(1) = \dfrac{4}{10} = \dfrac{A+B}{5} + \dfrac{C}{2}$

donc $A + B = 5 \times \left(\frac{2}{5}\right) - \dfrac{C}{2}$ or on connaît les valeurs de B et C

donc $A = \boxed{\frac{-2}{5}}$

On a établi que $\boxed{G(p) = \dfrac{p+3}{(p+1)(p^2+4)} = \dfrac{\frac{-2}{5}p + \frac{7}{5}}{p^2+4} + \dfrac{\frac{2}{5}}{p+1}}$

3. $\dfrac{7}{(z+2)^2(z-3)} = \dfrac{A}{(z+2)^2} + \dfrac{B}{z+2} + \dfrac{C}{z-3}$

Pour trouver A, associé à $(z+2)^2$ on multiplie $G(z)$ par $(z+2)^2$ on simplifie et on fait tendre z vers -2

On obtient : $(z+2)^2 G(z) = \dfrac{7(z+2)^2}{(z+2)^2(z-3)} = \dfrac{A(z+2)^2}{(z+2)^2} + \dfrac{B(z+2)^2}{z+2} + \dfrac{C(z+2)^2}{z-3}$

puis $(z+2)^2 G(z) = \dfrac{7}{z-3} = A + B(z+2) + \dfrac{C(z+2)^2}{z-3}$

et enfin $\lim\limits_{z\to -2}(z+2)^2 G(z) = \dfrac{7}{-5} = A + 0 + 0$ donc $\boxed{A = \frac{-7}{5}}$

Pour trouver C, associé à $(z-3)$ on multiplie $G(z)$ par $(z-3)$ on simplifie et on fait tendre z vers 3

On obtient : $(z-3)G(z) = \dfrac{7(z-3)}{(z+2)^2(z-3)} = \dfrac{A(z-3)}{(z+2)^2} + \dfrac{B(z-3)}{z+2} + \dfrac{C(z-3)}{z-3}$

puis $(z-3)G(z) = \dfrac{7}{(z+2)^2} = \dfrac{A(z-3)}{(z+2)^2} + \dfrac{B(z-3)}{z+2} + C$

et enfin $\lim\limits_{z\to 3}(z-3)G(z) = \dfrac{7}{25} = 0 + 0 + C$

donc $\boxed{C = \frac{7}{25}}$

Pour trouver B, associé à $z+2$ on multiplie $G(z)$ par $(z+2)$ on simplifie et on fait tendre z vers $+\infty$

On obtient : $(z+2)G(z) = \dfrac{7(z+2)}{(z+2)^2(z-3)} = \dfrac{A(z+2)}{(z+2)^2} + \dfrac{B(z+2)}{z+2} + \dfrac{C(z+2)}{z-3}$

puis $(z+2)G(z) = \dfrac{7}{(z+2)(z-3)} = \dfrac{A}{(z+2)} + B + \dfrac{C(z+2)}{z-3}$

et enfin $\lim\limits_{z\to +\infty}(z+2)G(z) = 0 = 0 + B + C$ donc $B = -C$

donc $\boxed{B = \frac{-7}{25}}$

On a établi que : $\boxed{G(z) = \dfrac{\frac{-7}{5}}{(z+2)^2} + \dfrac{\frac{-7}{25}}{z+2} + \dfrac{\frac{7}{25}}{z-3}}$