Calculer les limites suivantes en indiquant au moins une étape :

$\lim\limits_{+\infty} 2x^3 - 5x^2 + 1$

C'est une forme indéterminée $\infty - \infty$ donc on doit en changer l'écriture.

On a : $2x^3 - 5x^2 + 1 = x^3 \times \left(2 - \dfrac{5}{x} + \dfrac{1}{x^2}\right)$

or $\lim\limits_{+\infty} x^3 = +\infty$ et $\lim\limits_{+\infty} \left(2 - \dfrac{5}{x} + \dfrac{1}{x^2}\right) = 2$

donc par produit $\lim\limits_{+\infty} 2x^3 - 5x^2 + 1 = +\infty$

$\lim\limits_{+\infty} \dfrac{2}{1-x}$

On a : $\lim\limits_{+\infty} 1 - x = -\infty$ et $\lim\limits_{+\infty} 2 = 2$ donc par quotient $\lim\limits_{+\infty} \dfrac{2}{1-x} = 0$

$\lim\limits_{+\infty} \dfrac{2x-3}{x+1}$

C'est une forme indéterminée $\dfrac{\infty}{\infty}$ donc on doit en changer l'écriture.

On a : $\dfrac{2x-3}{x+1} = \dfrac{x\left(2 - \frac{3}{x}\right)}{x\left(1 + \frac{1}{x}\right)} = \dfrac{2 - \frac{3}{x}}{1 + \frac{1}{x}}$ or $\lim\limits_{+\infty} \frac{1}{x} = 0$ donc $\lim\limits_{+\infty} \dfrac{2x-3}{x+1} = \dfrac{2}{1} = 2$

$\lim\limits_{+\infty} (3x+1)e^{-x}$

C'est une forme indéterminée $\dfrac{\infty}{\infty}$ donc on doit en changer l'écriture.

On a : $(3x+1)e^{-x} = 3xe^{-x} + e^{-x} = 3\dfrac{x}{e^x} + \dfrac{1}{e^x}$

or le cours sur l'exponentielle nous apprend que $\lim\limits_{+\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$ donc $\lim\limits_{+\infty} \dfrac{x}{e^x} = 0$

et $\lim\limits_{+\infty} e^x = +\infty$ donc $\lim\limits_{+\infty} \dfrac{1}{e^x} = 0$

finalement $\lim\limits_{+\infty} (3x+1)e^{-x} = 0$

$\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ x < 2}} \dfrac{1-3x}{2-x}$

$\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ x < 2}} 2 - x = 0_+$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ x < 2}} 1 - 3x = -5 < 0$ donc par quotient : $\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ x < 2}} \dfrac{1-3x}{2-x} = -\infty$

$\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ x > 2}} \dfrac{1-3x}{2-x}$

$\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ x > 2}} 2 - x = 0_-$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ x > 2}} 1 - 3x = -5 < 0$ donc par quotient : $\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ x > 2}} \dfrac{1-3x}{2-x} = +\infty$

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} 1 + \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2}$$

$\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \frac{1}{x} = +\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \frac{2}{x^2} = +\infty$

donc c'est une forme indéterminée $\infty - \infty$ donc on doit en changer l'écriture.

On a : $1 + \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2} = \frac{x^2 + x - 2}{x^2}$ or $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} x^2 + x - 2 = -2 < 0$

et $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} x^2 = 0_+$ donc par quotient : $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} 1 + \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2} = -\infty$

$$\lim_{\substack{x \to 1 \\ x > 1}} \frac{1 - x}{1 - \sqrt{x}}$$

$\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x > 1}} 1 - x = 0$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x > 1}} 1 - \sqrt{x} = 0$

donc on a la forme indéterminée $\frac{0}{0}$, on doit changer d'écriture. La présence de $\sqrt{}$ incite à utiliser la quantité conjuguée.

$\frac{1 - x}{1 - \sqrt{x}} = \frac{1 - x}{1 - \sqrt{x}} \times \frac{1 + \sqrt{x}}{1 + \sqrt{x}} = \frac{(1-x)(1+\sqrt{x})}{1-x} = 1 + \sqrt{x}$

puis $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x > 1}} \frac{1 - x}{1 - \sqrt{x}} = \lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x > 1}} \frac{1 - x}{1 - \sqrt{x}} = 2$