Résoudre les deux équations différentielles :

a) $\dfrac{1}{2}y' + 4y = 5\sin(2t)$ avec $y(0) = 1$

Etape 1 : on recherche l'ensemble de solutions de l'équation sans second membre (SSM).

$a = \frac{1}{2}$ et $b = 4$ donc $F'(t) = \dfrac{b}{a} = 8$

Une primitive est alors $F(t) = 8t + 0$

Toutes les solutions sont les $y(t) = Ce^{-F(t)} = Ce^{-8t}$ où C est une constante réelle quelconque.

Etape 2 : on recherche une solution particulière de l'équation complète.

Le second membre est une fonction cosinus donc on recherche une solution particulière y_p sous la forme

$y_p(t) = A\cos(2t) + B\sin(2t)$ donc $y_p'(t) = -2A\sin(2t) + 2B\cos(2t)$

L'équation devient : $\frac{1}{2}\Big(-2A\sin(2t) + 2B\cos(2t)\Big) + 4\Big(A\cos(2t) + B\sin(2t)\Big) = 5\sin(2t)$

puis $\Big(B + 4A\Big)\cos(2t) + \Big(-A + 4B\Big)\sin(2t) = 0\cos(2t) + 5\sin(2t)$

On peut alors identifier, les termes en cosinus ensemble et les termes en sinus ensemble

$\begin{cases} 4A + B &= 0 \\ -A + 4B &= 5 \end{cases}$ donc $4A = -B$ puis $A = \frac{-1}{4}B$

puis en renvoyant dans l'autre équation, on a : $\frac{1}{4}B + 4B = 5$ donc $\frac{17}{4}B = 5$ donc $B = \frac{20}{17}$

Et enfin $A = \frac{-1}{4} \times B = \frac{-5}{17}$

Une solution particulière de l'équation avec second membre est alors

$$y_p(t) = \frac{-5}{17}\cos(2t) + \frac{20}{17}\sin(2t)$$

Etape 3 : on détermine l'ensemble des solutions de l'équation complète.

y est une solution de l'équation équivaut à $y - y_p$ est une solution de (SSM)

donc toutes les solutions de l'équation complète sont les sommes :

$$y(t) = Ce^{-8t} - \tfrac{5}{17}\cos(2t) + \tfrac{20}{17}\sin(2t)$$

Etape 4 : on recherche l'unique solution du problème.

Puisque $y(0) = 1$ on a : $1 = Ce^0 - \frac{5}{17} + 0$ donc $C = \frac{22}{17}$

L'unique solution du problème différentiel est :

$$\boxed{y(t) = \tfrac{22}{17}e^{-8t} - \tfrac{5}{17}\cos(2t) + \tfrac{20}{17}\sin(2t)}$$

b) $y'' - 6y' + 5y = t$ avec $y(0) = y'(0) = 1$

Etape 1 : on recherche l'ensemble de solutions de l'équation sans second membre (SSM).

Son équation caractéristique est : $(EC) : r^2 - 6r + 5 = 0$

Son discriminant est $\Delta = (-6)^2 - 4 \times 1 \times 5 = 16 > 0$. Une racine de Δ est alors 4. (EC) a deux solutions $r_1 = \frac{6-4}{2}$ et $r_2 = \frac{6+4}{2}$. C'est à dire $r_1 = 1$ et $r_2 = 5$

Toutes les solutions de l'équation sans second membre sont alors les : $y(t) = C_1e^t + C_2e^{5t}$ où C_1 et C_2 sont des constantes réelles quelconques.

Etape 2 : on recherche une solution particulière de l'équation complète.

Le second membre est une fonction affine donc on recherche une solution particulière y_p sous la forme

$y_p(t) = At + B$ donc $y_p'(t) = A$ puis $y_p''(t) = 0$

L'équation devient : $1 \times 0 - 6A + 5(At + B) = t$

donc en ordonnant les termes : $5At - 6A + 5B = t + 0$

on peut alors identifier les termes en t, cela donne : $5A = 1$ donc $A = \frac{1}{5}$

puis $-6A + 5B = 0$ donc $5B = 6A = \frac{6}{5}$ donc $B = \frac{6}{25}$

Une solution particulière de l'équation avec second membre est alors $y_p(t) = \frac{1}{5}t + \frac{6}{25}$

Etape 3 : on détermine l'ensemble des solutions de l'équation complète.

y est une solution de l'équation équivaut à $y - y_p$ est une solution de (SSM)

donc toutes les solutions de l'équation complète sont les sommes : $y(t) = C_1e^t + C_2e^{5t} + \frac{1}{5}t + \frac{6}{25}$

Etape 4 : on recherche l'unique solution du problème.

On détermine l'unique solution correspondant aux conditions initiales.

On a : $y(t) = C_1e^t + C_2e^{5t} + \frac{1}{5}t + \frac{6}{25}$ donc $y(0) = C_1 + C_2 + \frac{6}{25}$

Or $y(0) = 1$ donc $C_1 + C_2 = \frac{19}{25}$

Par ailleurs $y'(t) = C_1e^t + 5C_2e^{5t} + \frac{1}{5}$ donc $y'(0) = C_1 + 5C_2 + \frac{1}{5}$ or $y'(0) = 1$

donc $C_1 + 5C_2 = \frac{4}{5}$

On dispose alors du système $\begin{cases} C_1 + C_2 = \frac{19}{25} & (L_1) \\ C_1 + 5C_2 = \frac{4}{5} & (L_2) \end{cases}$, on obtient : $\begin{cases} C_1 + C_2 = \frac{19}{25} \\ C_2 = \frac{1}{100} \end{cases}$

en effectuant $(L_2) - (L_1)$. Enfin, en reportant dans la première équation, on a : $C_1 = \frac{3}{4}$

Finalement l'unique solution du problème est $\boxed{y(t) = \frac{3}{4}e^t + \frac{1}{100}e^{5t} + \frac{1}{5}t + \frac{6}{25}}$