

On considère la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(z) = \frac{1+2ix}{2+3ix}$

1. Donner la forme algébrique de $f(1)$

$$\text{On a : } f(1) = \frac{1+2i}{2+3i} = \frac{1+2i}{2+3i} \times \frac{2-3i}{2-3i} = \frac{8+i}{4+9} = \frac{8}{13} + i\frac{1}{13}$$

2. Résoudre $f(x) = \frac{13+i}{20}$

$$\text{On a : } f(z) = \frac{13+i}{20} \text{ ssi } \frac{1+2ix}{2+3ix} = \frac{13+i}{20}$$

$$\text{or } \frac{1+2ix}{2+3ix} = \frac{1+2ix}{2+3ix} \times \frac{2-3ix}{2-3ix} = \frac{2+6x^2}{4+9x^2} + i\frac{x}{4+9x^2}$$

$$\text{donc } f(z) = \frac{13+i}{20} \text{ équivaut à } \frac{2+6x^2}{4+9x^2} + i\frac{x}{4+9x^2} = \frac{13+i}{20}$$

par identification des parties réelles d'une part, des parties imaginaires d'autres part, on obtient :

$$\frac{2+6x^2}{4+9x^2} = \frac{13}{20} \quad (L_1) \text{ et } \frac{x}{4+9x^2} = \frac{1}{20} \quad (L_2)$$

or $\frac{x}{4+9x^2} = \frac{1}{20}$ donne $20x = 4+9x^2$ puis $9x^2 - 20x + 4 = 0$ son discriminant est $\Delta = 256$, ses racines sont $x = 2$ et $x = \frac{2}{9}$ en reportant dans (L_1) , seule la valeur $x = 2$ donne $\frac{13}{20}$

Finalement $x = 2$.

3. Calculer $f(x) - \frac{7}{12}$ sous forme algébrique.

$$\text{Cette fois, on calcule } \frac{1+2ix}{2+3ix} - \frac{7}{12} = \frac{2+6x^2}{4+9x^2} + i\frac{x}{4+9x^2} - \frac{7}{12}$$

$$\text{donc } f(x) - \frac{7}{12} = \frac{24+72x^2-7(4+9x^2)}{12(4+9x^2)} + i\frac{12x}{12(4+9x^2)} = \frac{9x^2-4+12ix}{12(4+9x^2)}$$

4. Montrer que $\left|f(x) - \frac{7}{12}\right| = \frac{1}{12}$

$$\begin{aligned} \text{On a : } \left|f(x) - \frac{7}{12}\right|^2 &= \left|\frac{9x^2-4+12ix}{12(4+9x^2)}\right|^2 \\ &= \frac{1}{12^2(4+9x^2)^2} \times |9x^2-4+12ix|^2 \\ &= \frac{1}{12^2(4+9x^2)^2} ((9x^2-4)^2 + (12x)^2) = \frac{1}{12^2(4+9x^2)^2} (81x^4+16-72x^2+144x^2) \\ &= \frac{1}{12^2(4+9x^2)^2} (81x^4+72x^2+16) \text{ or } (4+9x^2)^2 = 81x^4+72x^2+16 \\ &= \frac{1}{12^2} \text{ donc } \left|f(x) - \frac{7}{12}\right| = \frac{1}{12} \end{aligned}$$

5. En déduire la position des points M d'affixe $z = f(x)$ lorsque x décrit $\mathbb{R}$

Puisque la distance AB est égale à $|z_B - z_A|$ et que $\left|f(x) - \frac{7}{12}\right| = \frac{1}{12}$, en notant M le point image de $z = f(x)$ et A celui de $\frac{7}{12}$ c'est à dire $A(\frac{7}{12}; 0)$, on a alors :

$$AM = \frac{1}{12} \text{ ce qui signifie que } M \text{ est sur le cercle de centre } A \text{ et de rayon } R = \frac{1}{12}$$

Que l'on appelle cercle de Nyquist lorsque f représente la fonction de transfert d'un dispositif électronique