

Déterminer les réels A , B et C pour que :

$$1. f(x) = \frac{2x+3}{x(x-1)(x+4)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x+4}$$

Pour trouver A , associé à x on multiplie $f(x)$ par x on simplifie et on fait tendre x vers 0

$$\text{On obtient : } xf(x) = \frac{(2x+3)x}{x(x-1)(x+4)} = A + \frac{Bx}{x-1} + \frac{Cx}{x+4}$$

$$\text{puis } xf(x) = \frac{2x+3}{(x-1)(x+4)} = A + \frac{Bx}{x-1} + \frac{Cx}{x+4}$$

$$\text{et enfin } \lim_{x \rightarrow 0} xf(x) = \frac{3}{-4} = A + 0 + 0 \text{ donc } \boxed{A = -\frac{3}{4}}$$

Pour trouver B , associé à $(x-1)$ on multiplie $f(x)$ par $(x-1)$ on simplifie et on fait tendre x vers 1

$$\text{On obtient : } (x-1)f(x) = \frac{(2x+3)(x-1)}{x(x-1)(x+4)} = \frac{A(x-1)}{x} + \frac{B(x-1)}{x-1} + \frac{C(x-1)}{x+4}$$

$$\text{puis } (x-1)f(x) = \frac{2x+3}{x(x+4)} = \frac{A(x-1)}{x} + B + \frac{C(x-1)}{x+4}$$

$$\text{et enfin } \lim_{x \rightarrow 1} (x-1)f(x) = \frac{5}{5} = 0 + B + 0 \text{ donc } \boxed{B = 1}$$

Pour trouver C , associé à $(x+4)$ on multiplie $f(x)$ par $(x+4)$ on simplifie et on fait tendre x vers -4

$$\text{On obtient : } (x+4)f(x) = \frac{(2x+3)(x+4)}{x(x-1)(x+4)} = \frac{A(x+4)}{x-1} + \frac{B(x+4)}{x-1} + \frac{C(x+4)}{x+4}$$

$$\text{puis } (x+4)f(x) = \frac{2x+3}{x(x-1)} = \frac{A(x+4)}{x-1} + \frac{B(x+4)}{x-1} + C$$

$$\text{et enfin } \lim_{x \rightarrow -4} (x+4)f(x) = \frac{+5}{-20} = 0 + 0 + C \text{ donc } \boxed{C = -\frac{1}{4}}$$

$$2. f(x) = \frac{5}{(x^2-1)(x+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{(x+1)^2}$$

Ici le dénominateur n'a pas encore été factorisé

$$\text{or : } (x^2-1)(x+1) = (x-1)(x+1)(x+1) = (x-1)(x+1)^2$$

$$\text{donc la nouvelle écriture de } f(x) \text{ est } f(x) = \frac{5}{(x-1)(x+1)^2}$$

Pour trouver A , associé à $(x-1)$ on multiplie $f(x)$ par $(x-1)$ on simplifie et on fait tendre x vers 1

$$\text{On obtient : } (x-1)f(x) = \frac{5(x-1)}{(x-1)(x+1)^2} = \frac{A(x-1)}{x+1} + \frac{B(x-1)}{x+1} + \frac{C(x-1)}{(x+1)^2}$$

$$\text{puis } (x-1)f(x) = \frac{5}{(x+1)^2} = A + \frac{B(x-1)}{x+1} + \frac{C(x-1)}{(x+1)^2}$$

$$\text{et enfin } \lim_{x \rightarrow 1} (x-1)f(x) = \frac{5}{4} = A + 0 + 0 \text{ donc } \boxed{A = \frac{5}{4}}$$

Pour trouver C, associé à $(x+1)^2$ on multiplie $f(x)$ par $(x+1)^2$ on simplifie et on fait tendre x vers -1

$$\text{On obtient : } (x+1)^2 f(x) = \frac{5(x+1)^2}{(x-1)(x+1)^2} = \frac{A(x+1)^2}{x-1} + \frac{B(x+1)^2}{x+1} + \frac{C(x+1)^2}{(x+1)^2}$$

$$\text{puis } (x+1)^2 f(x) = \frac{5}{x-1} = \frac{A(x+1)^2}{x-1} + B(x+1) + C$$

$$\text{et enfin } \lim_{x \rightarrow -1} (x+1)^2 f(x) = \frac{5}{-2} = 0 + 0 + C \text{ donc } \boxed{C = \frac{-5}{2}}$$

Pour trouver B, associé à $(x+1)$ on multiplie $f(x)$ par $(x+1)$ on donne une valeur simple à x , par exemple $x = 0$

$$\text{On obtient : } (x+1)f(x) = \frac{5(x+1)}{(x-1)(x+1)^2} = \frac{A(x+1)}{x-1} + \frac{B(x+1)}{x+1} + \frac{C(x+1)}{(x+1)^2}$$

$$\text{puis } (x+1)f(x) = \frac{5}{(x-1)(x+1)} = \frac{A(x+1)}{x-1} + B + \frac{C(x+1)}{(x+1)^2}$$

$$\text{et enfin } -5 = -A + B + C \text{ donc } B = -5 + A - C \text{ donc } \boxed{B = \frac{-5}{4}}$$

$$3. f(x) = \frac{x^2}{(x^2+1)(x-3)} = \frac{Ax+B}{x^2+1} + \frac{C}{x-3}$$

Pour trouver C, associé à $(x-3)$ on multiplie $f(x)$ par $(x-3)$ on simplifie et on fait tendre x vers 3

$$\text{On obtient : } (x-3)f(x) = \frac{x^2(x-3)}{(x-3)(x^2+1)} = \frac{(Ax+B)(x-3)}{x^2+1} + \frac{C(x-3)}{x-3}$$

$$\text{puis } (x-3)f(x) = \frac{x^2}{x^2+1} = \frac{(Ax+B)(x-3)}{x^2+1} + C$$

$$\text{et enfin } \lim_{x \rightarrow 3} (x-3)f(x) = \frac{9}{10} = 0 + C$$

$$\text{donc } \boxed{C = \frac{9}{10}}$$

Pour trouver A et B, associés à (x^2+1) on multiplie $f(x)$ par (x^2+1) on simplifie et on fait tendre x vers i

$$\text{On obtient : } (x^2+1)f(x) = \frac{x^2(x^2+1)}{(x^2+1)(x-3)} = \frac{(Ax+B)(x^2+1)}{x-3} + \frac{C(x^2+1)}{x-3}$$

$$\text{donc } (x^2+1)f(x) = \frac{x^2}{x-3} = Ax + B + \frac{C(x^2+1)}{x-3}$$

$$\text{donc } \frac{-1}{i-3} = Ai + B + 0 = B + Ai$$

$$\text{or } \frac{-1}{i-3} = \frac{-1}{i-3} \times \frac{-i-3}{-i-3} = \frac{3+i}{10} = \frac{3}{10} + \frac{1}{10}i$$

$$\text{donc } \boxed{B = \frac{3}{10}} \text{ en identifiant les parties réelles}$$

$$\text{et } \boxed{A = \frac{1}{10}} \text{ en identifiant les parties imaginaires}$$