

Déterminer les limites suivantes :

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x+3}{5x+2}$

On obtient la forme indéterminée $\frac{\infty}{\infty}$, il faut donc changer l'écriture de $f(x) = \frac{2x+3}{5x+2}$

On écrit $f(x) = \frac{x(2 + \frac{3}{x})}{x(5 + \frac{2}{x})} = \frac{2 + \frac{3}{x}}{5 + \frac{2}{x}}$

or $\lim_{x \rightarrow +\infty} 2 + \frac{3}{x} = 2$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} 5 + \frac{2}{x} = 5$ donc par quotient $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x+3}{5x+2} = \frac{2}{5}$

- $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2+2x+3}{5x+2}$

On obtient la forme indéterminée $\frac{\infty}{\infty}$, il faut donc changer l'écriture de $f(x) = \frac{x^2+2x+3}{5x+2}$

On écrit $f(x) = \frac{x^2(1 + \frac{2}{x} + \frac{3}{x^2})}{x(5 + \frac{2}{x})} = x \times \frac{1 + \frac{2}{x} + \frac{3}{x^2}}{5 + \frac{2}{x}}$

or $\lim_{x \rightarrow -\infty} 1 + \frac{2}{x} + \frac{3}{x^2} = 1$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} 5 + \frac{2}{x} = 5$ donc par quotient $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1 + \frac{2}{x} + \frac{3}{x^2}}{5 + \frac{2}{x}} = \frac{1}{5}$

or $\lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty$ donc par produit : $\lim_{x \rightarrow -\infty} x \times \frac{1 + \frac{2}{x} + \frac{3}{x^2}}{5 + \frac{2}{x}} = -\infty$

C'est à dire $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2+2x+3}{5x+2} = -\infty$

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5x\sqrt{x}}{x^2+2}$

On obtient la forme indéterminée $\frac{\infty}{\infty}$, il faut donc changer l'écriture de $f(x) = \frac{5x\sqrt{x}}{x^2+2}$

On écrit $f(x) = \frac{5x^1 \times x^{1/2}}{x^2+2} = \frac{5x^{3/2}}{x^2+2} = \frac{x^{3/2} \times 5}{x^2(1 + \frac{2}{x^2})} = \frac{1}{x^{1/2}} \frac{5}{1 + \frac{2}{x^2}}$

or $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5}{1 + \frac{2}{x^2}} = 5$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^{1/2}} = 0$ donc par produit $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^{1/2}} \frac{5}{1 + \frac{2}{x^2}} = 0$

C'est à dire $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5x\sqrt{x}}{x^2+2} = 0$

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^{15}e^{-x}$

D'après le cours, par croissances comparées de la puissance par rapport à l'exponentielle

$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^{15}e^{-x} = 0$

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cos(5x)}{x}$

La limite en $+\infty$ de $\cos(5x)$ n'existe pas mais pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a : $-1 \leq \cos(5x) \leq 1$

donc pour tout $x > 0$, on a : $-\frac{1}{x} \leq \frac{\cos(5x)}{x} \leq \frac{1}{x}$

or $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$ donc par double comparaison, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cos(5x)}{x} = 0$

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(3x+1)}{x}$

D'après le cours, par croissances comparées de la puissance par rapport au logarithme on a :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(3x+1)}{x} = 0$$

- $\lim_{\substack{x \rightarrow 5 \\ x > 5}} \frac{1-3x}{x-5}$

On a : $\lim_{\substack{x \rightarrow 5 \\ x > 5}} 1-3x = -14$ et $\lim_{\substack{x \rightarrow 5 \\ x > 5}} x-5 = 0_+$ donc par quotient : $\lim_{\substack{x \rightarrow 5 \\ x > 5}} \frac{\ln(3x+1)}{x} = -\infty$

- $\lim_{\substack{x \rightarrow -2 \\ x < -2}} \frac{x+1}{4-x^2}$

On a : $\lim_{\substack{x \rightarrow -2 \\ x < -2}} x+1 = -1 < 0$

Par ailleurs : $4-x^2 = (2-x)(2+x)$

et $\lim_{\substack{x \rightarrow -2 \\ x < -2}} 2-x = 4 > 0$ et $\lim_{\substack{x \rightarrow -2 \\ x < -2}} 2+x = 0_-$ donc par produit $\lim_{\substack{x \rightarrow -2 \\ x < -2}} 4-x^2 = 0_-$

et par quotient $\lim_{\substack{x \rightarrow -2 \\ x < -2}} \frac{x+1}{4-x^2} = +\infty$