L'étude d'un système électronique nous fait considérer le système différentiel suivant

$$\begin{cases} x' = 4x + 2y \quad +t & (L_1) \\ y' = 3x + 3y & (L_2) \end{cases}$$

où x et y sont deux fonctions de la variable t.

1. A partir de la ligne (L_2) exprimer x en fonction de y et y'.

   $y' = 3x + 3y$ donne $x = \dfrac{1}{3}y' - y$

2. Exprimer alors x' en fonction de y et y''.

   $x = \dfrac{1}{3}y' - y$ donne $x' = \dfrac{1}{3}y'' - y'$

3. En injectant ces résultats dans la ligne (L_1) montrer que : $y'' - 7y' + 6y = 3t$.

   $x' = 4x + 2y + t$ devient : $\dfrac{1}{3}y'' - y' = 4 \times \left(\dfrac{1}{3}y' - y\right) + 2y + t$

   donc $\dfrac{1}{3}y'' - y' = \dfrac{4}{3}y' - 4y + 2y + t$ donc $\dfrac{1}{3}y'' - \dfrac{7}{3}y' + 2y = t$ puis $y'' - 7y' + 6y = 3t$.

4. Résoudre cette équation différentielle. (Note : on cherchera une solution particulière affine.)

   On résout l'équation sans second membre associée $y'' - 7y' + 6y = 0$

   Son équation caractéristique est : $r^2 - 7r + 6 = 0$, de discriminant $\Delta = 49 - 24 = 25 > 0$, il y a deux solutions $r = 1$ et $r = 6$

   Toutes les solutions de $y'' - 7y' + 6y = 0$ sont donc les $y(t) = C_1e^t + C_2e^{6t}$

   On recherche une solution particulière affine $y_p(t) = at + b$

   dans ce cas $y_p'(t) = a$ et $y''(t) = 0$

   l'équation devient : $0 - 7a + 6(at + b) = 3t$ donc $6at + 6b - 7a = 3t + 0$

   donc $a = \frac{1}{2}$ puis $b = \frac{7}{12}$

   Une solution particulière est $y(t) = \frac{1}{2}t + \frac{7}{12}$

   Toutes les solutions de l'équation différentielle complète sont alors les sommes :

$$y(t) = C_1e^t + C_2e^{6t} + \tfrac{1}{2}t + \tfrac{7}{12}$$

5. En utilisant la question 1) en déduire l'expression de $x(t)$.

   On a : $x = \dfrac{1}{3}y' - y$

   or $y(t) = C_1e^t + C_2e^{6t} + \frac{1}{2}t + \frac{7}{12}$ donc $y'(t) = C_1e^t + 6C_2e^{6t} + \frac{1}{2}$

   donc $x(t) = -\frac{2}{3}C_1e^t + C_2e^{6t} - \frac{1}{2}t - \frac{5}{12}$

6. Sachant que $x(0) = 1$ et $y(0) = 2$ déterminer les solutions $x(t)$ et $y(t)$.

   Puisque $x(0) = 0$, on a : $-\frac{2}{3}C_1 + C_2 - \frac{5}{12} = 0$

   Puisque $y(0) = 0$, on a : $C_1 + C_2 + \frac{7}{12} = 0$

   En effectuant ligne2-ligne1 on obtient : $\frac{5}{3}C_1 + 1 = 0$ donc $C_1 = -\frac{3}{5}$

   puis en reportant dans ligne2 $B = \frac{1}{60}$

   On a alors : $x(t) = \frac{2}{5}e^t + \frac{1}{60}e^{6t} - \frac{1}{2}t - \frac{5}{12}$ et $y(t) = -\frac{3}{5}e^t + \frac{1}{60}e^{6t} + \frac{1}{2}t + \frac{7}{12}$