

1. On considère le polynôme  $P$  défini sur  $\mathbb{C}$  par :

$$P(z) = z^3 + (2 - 2i)z^2 + (4 - 4i)z - 8i.$$

(a) Démontrer que  $2i$  est une solution de l'équation  $P(z) = 0$ .

$$\text{On a : } P(2i) = (2i)^3 + (2 - 2i)(2i)^2 + (4 - 4i)2i - 8i = -8i - 8 + 8i + 8i + 8 - 8i = 0$$

(b) Démontrer que  $P(z) = (z - 2i)(z^2 + 2z + 4)$ .

Puisque  $2i$  est une racine du polynôme, celui-ci est factorisable par  $(z - 2i)$ , on a donc :  $P(z) = (z - 2i)(az^2 + bz + c)$

Développons, cela donne :

$$P(z) = az^3 + bz^2 + cz - 2 aiz^2 - 2 ibz - 2 ic = az^3 + (b - 2ia)z^2 + (c - 2ib)z - 2ic$$

En identifiant les termes en  $z^3$ , on obtient  $a = 1$

En identifiant les termes en  $z^2$ , on obtient :  $2 - 2i = b - 2ia$  donc  $b = 2$

En identifiant les termes en  $z$ , on obtient :  $4 - 4i = c - 2ib$  donc  $c = 4$

Les termes constants nous apportent la confirmation  $-8i = -2ic$  donc  $c = 4$

$$\text{donc } P(z) = (z - 2i)(z^2 + 2z + 4)$$

(c) En déduire toutes les solutions dans  $\mathbb{C}$  de l'équation  $P(z) = 0$ .

$$\text{On a : } P(z) = 0 \text{ ssi } (z - 2i)(z^2 + 2z + 4) = 0$$

$$\text{ssi } z = 2i \text{ ou } z^2 + 2z + 4 = 0$$

$\Delta = 4 - 16 = -12 < 0$ , il y a deux racines complexes conjuguées

$$z_1 = \frac{-2 - 2i\sqrt{3}}{2} = -1 - i\sqrt{3} \text{ et } z_2 = -1 + i\sqrt{3}$$

$$\text{donc } P(z) = 0 \text{ ssi } z = 2i \text{ ou } z = -1 - i\sqrt{3} \text{ ou } z = -1 + i\sqrt{3}$$

2. Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé  $(\vec{Ou}, \vec{v})$ .

On réalisera une figure sur l'annexe donnée en dernière page du sujet.

On considère les points A, B et C d'affixes respectives :  $z_A = 1 + i\sqrt{3}$ ,  $z_B = 1 - i\sqrt{3}$ , et  $z_C = -2$ .

(a) Déterminer le module et un argument de chacun des trois nombres complexes  $z_A$ ,  $z_B$  et  $z_C$  puis les écrire en notation exponentielle.

$$|z_A| = |1 + i\sqrt{3}| = \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{1+3} = \sqrt{4} = 2$$

$$\text{de même } |z_B| = |1 - i\sqrt{3}| = \sqrt{1^2 + (-\sqrt{3})^2} = \sqrt{1+3} = \sqrt{4} = 2$$

$$\text{et } |z_C| = |-2 + 0i| = \sqrt{(-2)^2 + 0^2} = \sqrt{4+0} = 2$$

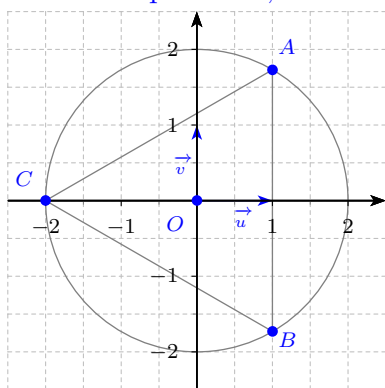
Puis, en notant  $\theta_A$  un argument de  $z_A$ , on a : 
$$\begin{cases} \cos \theta_A = \frac{1}{2} \\ \sin \theta_A = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}, \text{ donc le cercle trigonométrique}$$
 de référence nous donne :  $\arg(z_A) = \theta_A = \frac{\pi}{3}$ ,

Comme  $z_A$  et  $z_B$  sont conjuguées  $\arg(z_B) = -\frac{\pi}{3}$

Comme  $z_C$  est un réel négatif,  $\arg(z_C) = \pi$

Finalement :  $z_A = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$ ,  $z_B = 2e^{-i\frac{\pi}{3}}$  et  $z_C = 2e^{i\pi}$

(b) Placer les points A, B et C dans  $(O \vec{u} \vec{v})$



On note  $Z = \frac{z_A - z_C}{z_B - z_C}$ .

(c) Déterminer la forme algébrique de  $Z$ .

$$\begin{aligned} Z &= \frac{1 + i\sqrt{3} + 2}{1 - i\sqrt{3} + 2} = \frac{3 + i\sqrt{3}}{3 - i\sqrt{3}} = \frac{3 + i\sqrt{3}}{3 - i\sqrt{3}} \times \frac{3 + i\sqrt{3}}{3 + i\sqrt{3}} \\ &= \frac{(3 + i\sqrt{3})^2}{3^2 + (\sqrt{3})^2} = \frac{6 + 6i\sqrt{3}}{12} = \frac{1 + i\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

(d) Calculer le module et un argument de  $Z$ .

D'après ce qui précède  $|Z| = \left| \frac{1 + i\sqrt{3}}{2} \right| = \frac{2}{2} = 1$  et  $\arg(Z) = \arg\left(\frac{1 + i\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\pi}{3}$  (cf module et argument de  $z_A$ )

(e) En déduire la nature du triangle ABC.

Puisque  $|Z| = 1$  on a :  $\left| \frac{z_A - z_C}{z_B - z_C} \right| = 1$  donc  $|z_A - z_C| = |z_B - z_C|$  donc  $AC = BC$ , donc ABC un triangle isocèle.

Puisque  $\arg(Z) = \frac{\pi}{3}$ , on a :  $\arg\left(\frac{z_A - z_C}{z_B - z_C}\right) = \frac{\pi}{3}$

donc  $(\widehat{BC}, \widehat{AC}) = \frac{\pi}{3}$  donc ABC est finalement un triangle équilatéral.