On cherche à résoudre l'équation (E) $y' + 5y = e^{-5t}t^3$ sachant que $y(0) = 1$

1. Résoudre $y' + 5y = 0$

   Les solutions sont les $y(t) = Ce^{-5t}$ où C est une constante quelconque.

2. On note $y_p(t) = P(t)e^{-5t}$, calculer $y_p'(t)$

   y_p est un produit donc $y_p'(t) = P'(t)e^{-5t} - 5P(t)e^{-5t}$

3. En remplaçant y_p et y_p' dans l'équation (E) montrer que $P'(t) = \dfrac{1}{5}t^3$.

   L'équation (E) devient : $P'(t)e^{-5t} - 5P(t)e^{-5t} + 5P(t)e^{-5t} = e^{-5t}t^3$ donc $P'(t)e^{-5t} = e^{-5t}t^3$

4. En déduire $P(t)$ puis $y_p(t)$

   Puisque $P'(t)e^{-5t} = e^{-5t}t^3$ on a : $P'(t) = t^3$ donc en intégrant : $P(t) = \frac{1}{4}t^4 + ctse$

   On ne recherche qu'une solution particulière y_p donc on choisit le $cste = 0$

   et donc $y_p(t) = \frac{1}{4}t^4e^{-5t}$

5. Déterminer alors l'ensemble des solutions de (E) puis celle qui vérifie $y(0) = 1$

   Soit y une solution quelconque de (E), on a : $y' + 5y = e^{-5t}t^3$

   or y_p est une solution particulière de (E), on a : $y_p' + 5y_p = e^{-5t}t^3$

   donc par différence : $y' - y_p' + 5(y - y_p) = 0$

   donc $y - y_p$ vérifie l'équation $y_p' + 5y_p = 0$

   or toutes les solutions de $y_p' + 5y_p = 0$ sont les $y(t) = Ce^{-5t}$ où C est une constante quelconque.

   donc $y - y_p = Ce^{-5t}$ où C est une constante quelconque.

   C'est à dire : $y = y_p + Ce^{-5t}$ où C est une constante quelconque.

   Toutes les solutions de l'équation (E) sont donc les sommes d'une solution particulière et de la forme des solutions de l'équation sans second membre qui est associée.

   Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a : $y(t) = \frac{1}{4}t^4e^{-5t} + Ce^{-5t}$ où C est une constante quelconque.

   Sachant que $y(0) = 1$, on a : $\frac{1}{4}0^4e^0 + Ce^0 = 1$ donc $0 + C = 1$ donc $C = 1$

   L'unique solution du problème est donc $y(t) = \frac{1}{4}t^4e^{-5t} + e^{-5t}$