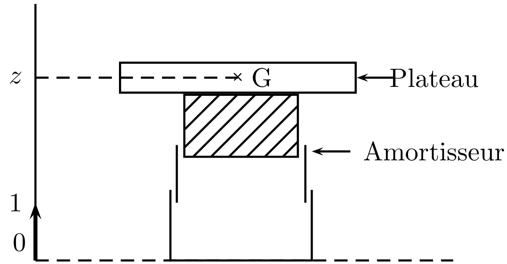
On considère un système mécanique formé d'un plateau soutenu par un amortisseur. Il est représenté sur le schéma ci-contre.



On note z la cote du centre de gravité du plateau. On suppose que z est une fonction de la variable réelle t, définie et deux fois dérivable sur un intervalle de $\mathbb{R}$ où t représente le temps exprimé en seconde. L'étude de ce système mécanique permet de considérer que la fonction z est solution de l'équation différentielle

$$(E) \quad : \quad 5z'' + 6z' + z = 2,5$$

1. (a) Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle $5z'' + 6z' + z = 0$.
   (b) Chercher une solution particulière constante de l'équation (E) et en déduire toutes les solutions de (E).
   (c) Donner la solution g de (E) qui vérifie les conditions $g(0) = 5$ et $g'(0) = -1$.
2. On suppose pour la suite du problème que $z(t) = f(t)$, où f est la fonction définie sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$ par $f(t) = 0,625\mathrm{e}^{-t} + 1,825\mathrm{e}^{-0,2t} + 2,5$
   (a) Étudier les variations de f.
   (b) Déterminer la limite de $f(t)$ quand t tend vers $+\infty$.
   (c) Déduire des deux questions précédentes l'évolution de la cote du point G en fonction du temps t.
   (d) On note $\mathcal{C}$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormal $\left(\mathrm{O},\ \overrightarrow{i},\ \overrightarrow{j}\right)$. Justifier l'existence d'une asymptote à la courbe $\mathcal{C}$ quand t tend vers $+\infty$; en donner une équation.