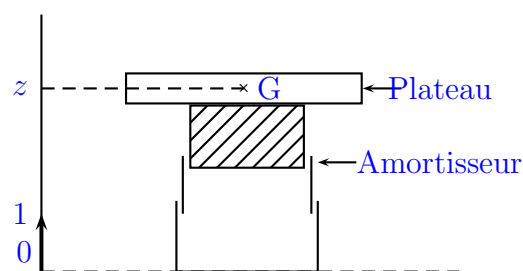


On considère un système mécanique formé d'un plateau soutenu par un amortisseur. Il est représenté sur le schéma ci-contre.

On note z la cote du centre de gravité du plateau. On suppose que z est une fonction de la variable réelle t , définie et deux fois dérivable sur un intervalle de $\mathbb{R}$ où t représente le temps exprimé en seconde. L'étude de ce système mécanique permet de considérer que la fonction z est solution de l'équation différentielle



$$(E) : 5z'' + 6z' + z = 2,5$$

1. (a) Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle $5z'' + 6z' + z = 0$.

C'est une équation différentielle linéaire d'ordre 2 sans second membre. son équation caractéristique est $5r^2 + 6r + 1 = 0$, elle a pour discriminant $\Delta = 36 - 20 = 16 > 0$, elle a donc deux racines $r = \frac{-6-4}{2 \times 5} = -1$ et $r = \frac{-6+4}{2 \times 5} = -\frac{1}{5}$

D'après le cours sur les équations différentielles,

toutes les solutions de $5z'' + 6z' + z = 0$ sont alors les $z(t) = C_1 e^{-t} + C_2 e^{-\frac{t}{5}}$

où C_1 et C_2 sont des constantes réelles quelconques.

- (b) Chercher une solution particulière constante de l'équation (E) et en déduire toutes les solutions de (E).

Si $z_p(t)$ est une solution particulière constante alors $z_p(t) = K$ donc $z_p'(t) = 0$ puis $z_p''(t) = 0$ et l'équation différentielle complète devient : $0 + 0 + K = 2,5$ donc $K = 2,5$

Une solution particulière de l'équation $5z'' + 6z' + z = 2,5$ est $z_p(t) = 2,5$

- (c) Donner la solution g de (E) qui vérifie les conditions $g(0) = 5$ et $g'(0) = -1$.

Toutes les solutions de $5z'' + 6z' + z = 2,5$ sont alors les sommes :

$$z(t) = C_1 e^{-t} + C_2 e^{-\frac{t}{5}} + 2,5$$

où C_1 et C_2 sont des constantes réelles quelconques.

Parmi elles on recherche celle, notée, g qui vérifie $g(0) = 5$, on a donc $C_1 + C_2 + 2,5 = 5$ (L_1)

$$\text{et } g'(t) = -C_1 e^{-t} - \frac{C_2}{5} e^{-\frac{t}{5}} + 0$$

$$\text{donc } g'(0) = -1 \text{ donne } -C_1 - \frac{C_2}{5} = -1 \quad (L_2)$$

$$(L_1) + (L_2) \text{ donne } C_2 = \frac{15}{8} \text{ puis } (L_1) \text{ donne } C_1 = \frac{5}{8}$$

$$\text{donc } g(t) = \frac{5}{8} e^{-t} + \frac{15}{8} e^{-0,2t} + 2,5$$

2. On suppose pour la suite du problème que $z(t) = f(t)$, où f est la fonction définie sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$ par $f(t) = 0,625e^{-t} + 1,825e^{-0,2t} + 2,5$

- (a) Étudier les variations de f .

On a : $f'(t) = -0,625e^{-t} - 0,755e^{-0,2t} + 0 < 0$ donc f est une fonctions strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

- (b) Déterminer la limite de $f(t)$ quand t tend vers $+\infty$.

On a : $\lim_{t \rightarrow +\infty} -t = -\infty$ et $\lim_{t \rightarrow +\infty} -0,2t = -\infty$ or $\lim_{u \rightarrow -\infty} e^u = 0$

donc par composition et somme $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = 0 + 0 + 2,5 = 2,5$.

- (c) Dédurre des deux questions précédentes l'évolution de la cote du point G en fonction du temps t .

D'après l'étude, la fonction f représente la cote de z , elle va donc décroître de 5 vers la valeur 2,5.

- (d) On note $\mathcal{C}$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Justifier l'existence d'une asymptote à la courbe $\mathcal{C}$ quand t tend vers $+\infty$; en donner une équation.

Puisque $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = 2,5 \in \mathbb{R}$, la droite d'équation $z = 2,5$ est une asymptote horizontale à la courbe représentant la fonction $f : t \mapsto z(t)$.