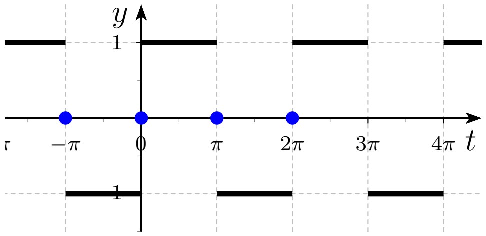
Soit f la fonction définie par $f(t)=1$ sur $]0;\pi[$, $f(0)=f(\pi)=0$, f est impaire et 2π-périodique.

1. Dessiner le graphe de f sur au moins deux périodes.



2. Montrer que tous les coefficients a_0 et a_n pour $n\in\mathbb{N}^*$ sont nuls.

   f est impaire donc $\displaystyle\int_{-\pi}^{0} f(t)\mathrm{d}t = -\int_0^{\pi} f(t)\mathrm{d}t$ donc l'intégrale sur $[-\pi;+\pi]$ est nulle donc a_0 est nul.

   f est impaire et cos est paire donc leur produit est impaire

   donc $\displaystyle\int_{-\pi}^{0} f(t)\cos(n\omega t)\mathrm{d}t = -\int_0^{\pi} f(t)\cos(n\omega t)\mathrm{d}t$ donc l'intégrale sur $[-\pi;+\pi]$ est nulle donc a_n est nul.

3. Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on a : $b_n=\dfrac{2(1-(-1)^n)}{n\pi}$.

   Soit $n\in\mathbb{N}^*$, on a : $b_n=\dfrac{2}{2\pi}\times\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin(n\omega t)dt$

   f est impaire et sin est impaire donc leur produit est paire.

   donc $\displaystyle\int_{-\pi}^{0} f(t)\sin(n\omega t)\mathrm{d}t = +\int_0^{\pi} f(t)\sin(n\omega t)\mathrm{d}t$ donc l'intégrale sur $[-\pi;+\pi]$ est le double de $+\int_0^{\pi} f(t)\sin(n\omega t)\mathrm{d}t$

   $$b_n=\frac{2}{2\pi}\times 2\times\int_0^{\pi} f(t)\sin(n\omega t)\mathrm{d}t=\frac{2}{\pi}\times\int_0^{\pi}\sin(nt)\mathrm{d}t$$

   $$\text{donc } b_n=\frac{2}{\pi}\times\left[\frac{-\cos(nt)}{n}\right]_0^{\pi}=\frac{-2}{n\pi}[\cos(nt)]_0^{\pi}$$

   $$=\frac{-2}{n\pi}(\cos(n\pi)-1)=\frac{-2}{n\pi}((-1)^n-1)=\frac{2(1-(-1)^n)}{n\pi}$$

4. Écrire les valeurs exactes de b_n pour $n\in\{1,\cdots,5\}$.

n	1	2	3	4	5
b_n	$\frac{4}{\pi}$	0	$\frac{4}{3\pi}$	0	$\frac{4}{5\pi}$

5. En déduire l'expression de $S_5(t)=a_0+\sum\limits_{n=1}^{5} a_n\cos(n\omega t)+b_n\sin(n\omega t)$.

   $S_5(t)=\frac{4}{\pi}\sin(t)+\frac{4}{3\pi}\sin(3t)\frac{4}{5\pi}\sin(5t)$

6. Calculer le carré de la valeur efficace de f, noté V_e^2.

7. On admet que le carré de la valeur efficace de S_5 est $W_e^2=a_0^2+\dfrac{1}{2}\sum\limits_{n=1}^{5} a_n^2+b_n^2$.

Calculer $\dfrac{W_e^2}{V_e^2}$ à 10^{-3} près.

$V_e2 = \dfrac{1}{2\pi} \times 2 \times \int_0^{\pi} 1^2 \mathrm{d}t = 1$ car f^2 est une fonction paire.

$W_e^2 = 0 + \dfrac{1}{2}\left(\left(\frac{4}{\pi}\right)^2 + \left(\frac{4}{3\pi}\right)^2 + \left(\frac{4}{5\pi}\right)^2\right) \approx 0,933$

On affirme que S_5 est une bonne approximation de f lorsque $\dfrac{W_e^2}{V_e^2}$ est supérieur à $0,95$.

Est-ce le cas ?

Non.

8. Utiliser un grapheur pour comparer les représentations graphiques de f et de S_5.