

[RAPIDE]

On considère l'équation différentielle  $y' + 2y = \cos(5t) U(t)$  sachant que  $y(0) = 1$

1. Écrire sa transformée de Laplace.

Transformons en Laplace, on obtient :  $pY - 1 + 2Y = \frac{p}{p^2 + 25}$

2. Montrer que  $Y = \frac{1}{p+2} + \frac{p}{(p^2+25)(p+2)}$

On a alors :  $(p+2)Y = 1 + \frac{p}{p+25}$

Enfin :  $Y = \frac{1}{p+2} + \frac{p}{(p^2+25)(p+2)}$

3. Déterminer les réels  $A$ ,  $B$  et  $C$  pour que :  $G(p) = \frac{p}{(p^2+25)(p+2)} = \frac{Ap+B}{p^2+25} + \frac{C}{p+2}$

Puisque  $G(p) = \frac{p}{(p^2+25)(p+2)} = \frac{Ap+B}{p^2+25} + \frac{C}{p+2}$

Pour trouver  $A$  et  $B$ , on calcule  $\lim_{p \rightarrow 5i} (p^2+25) \times G(p) = \frac{5i}{5i+2} = 5Ai + B + 0$

Or  $\frac{5i}{5i+2} = \frac{25+10i}{(5i+2)(-5i+2)} = \frac{25+10i}{29} = \frac{25}{29} + \frac{10}{29}i$

En identifiant les parties réelles, on a :  $B = \frac{25}{29}$

En identifiant les parties imaginaires, on a :  $5A = \frac{10}{29}$  donc  $A = \frac{2}{29}$

Pour trouver  $C$ , on calcule  $\lim_{p \rightarrow -2} (p+2) \times G(p) = \frac{-2}{29}$

On a donc  $G(p) = \frac{2}{29} \frac{p}{p^2+25} + \frac{5}{29} \frac{5}{p^2+25} - \frac{2}{29} \frac{1}{p+2}$

4. En déduire que  $y(t) = e^{-2t}U(t) + \frac{2}{29} \cos(5t)U(t) + \frac{5}{29} \sin(5t)U(t) - \frac{2}{29} e^{-2t}U(t)$

En remplaçant  $G(p)$  par sa décomposition dans l'expression de  $Y$ , on obtient :

$$Y(p) = \frac{1}{p+2} + \frac{2}{29} \frac{p}{p^2+25} + \frac{5}{29} \frac{5}{p^2+25} - \frac{2}{29} \frac{1}{p+2}$$

On peut alors reconnaître les originaux :

$$y(t) = e^{-2t}U(t) + \frac{2}{29} \cos(5t)U(t) + \frac{5}{29} \sin(5t)U(t) - \frac{2}{29} e^{-2t}U(t)$$

C'est à dire  $y(t) = \left( \frac{27}{29} e^{-2t} + \frac{2}{29} \cos(5t) + \frac{5}{29} \sin(5t) \right) U(t)$  en regroupant les termes.

5. Faire dessiner son graphe et celui de  $y(t) = e^{-2t}U(t)$  sur l'intervalle  $[0; 3]$  dans un même repère.

