On dispose d'un filtre analogique passe-bas du premier ordre dont l'équation différentielle est : $7s'(t)+s(t)=f(t)$ où s est la fonction causale associée au signal analogique de sortie, f est la fonction causale associée au signal analogique d'entrée et où le coefficient 7 correspond à la valeur 7ms de la constante de temps τ du filtre analogique, l'unité pour le temps t étant la milliseconde.
On peut alors réaliser une filtre numérique passe-bas du premier ordre tel que : le signal d'entrée est le signal causal échantillonné du signal d'entrée analogique avec la période $T_e=1$; ce signal est ici associé à la suite x définie sur $\mathbb{N}$ par $x(n)=e(n)=1$ pour tout $n\in\mathbb{N}$.
Le signal de sortie est le signal numérique causal associé à la suite y définie l'équation aux différences obtenue en replaçant dans l'équation différentielle précédente

- $s'(t)$ par $y(n)-y(n-1)$
- $s(t)$ par $y(n)$

1. Écrire l'équation aux différences, liant $y(n)$, $y(n-1)$ et $e(n)$.
   l'équation $7s'(t)+s(t)=f(t)$ devient $7(y(n)-y(n-1))+y(n)=e(n)$
2. Calculer $y(0)$ sachant que la suite y est associée à un signal causal et la valeur exacte de $y(1)$ puis sa valeur approchée au millième
   Lorsque $n=0$, $7(y(n)-y(n-1))+y(n)=e(n)$ devient : $7(y(0)-y(-1))+y(0)=e(0)$
   or y est causale donc $y(-1)=0$ et $e(0)=1$ donc $y(0)=\frac{1}{8}$
   Lorsque $n=1$, $7(y(n)-y(n-1))+y(n)=e(n)$ devient : $7(y(1)-\frac{1}{8})+y(1)=e(1)=1$
   donc $y(1)=\frac{15}{64}\approx 0,234$
3. Démontrer que la transformée en $\mathcal{Z}$ du signal y vérifie : $\mathcal{Z}_y(z)=\dfrac{1}{8}\,\dfrac{z^2}{(z-1)\left(z-\dfrac{7}{8}\right)}$

   Transformons en z l'équation aux différences : $7(y(n)-y(n-1))+y(n)=e(n)$, elle devient :

   $7(\mathcal{Z}_y-z^{-1}\mathcal{Z}_y)+\mathcal{Z}_y=\dfrac{z}{z-1}$

   donc $8\mathcal{Z}_y-7z^{-1}\mathcal{Z}_y=\dfrac{z}{z-1}$

   donc $8z\mathcal{Z}_y-7\mathcal{Z}_y=\dfrac{z^2}{z-1}$

   donc $(8z-7)\mathcal{Z}_y=\dfrac{z^2}{z-1}$

   donc $\mathcal{Z}_y=\dfrac{z^2}{(z-1)(8z-7)}$

   donc $\mathcal{Z}_y(z)=\dfrac{1}{8}\,\dfrac{z^2}{(z-1)\left(z-\dfrac{7}{8}\right)}$

4. Déterminer les réels A et B tels que $\dfrac{z}{(z-1)\left(z-\dfrac{7}{8}\right)} = \dfrac{A}{z-1} + \dfrac{B}{z-\dfrac{7}{8}}$

   Pour trouver A, associé à $(z-1)$ on multiplie $G(z)$ par $(z-1)$ on simplifie et on fait tendre z vers 1

   On obtient : $(z-1)G(z) = \dfrac{(z)(z-1)}{(z-1)(z-\frac{7}{8})} = \dfrac{A(z-1)}{z-1} + \dfrac{B(z-1)}{z-\frac{7}{8}}$

   puis $(z-1)G(z) = \dfrac{z}{z-\frac{7}{8}} = A + \dfrac{B(z-1)}{z-\frac{7}{8}}$

   et enfin $\lim\limits_{z\to 1}(z-1)G(z) = 8 = A + 0$ donc $A = 8$

   Pour trouver B, associé à $(z-\frac{7}{8})$ on multiplie $G(z)$ par $(z-\frac{7}{8})$ on simplifie et on fait tendre z vers $\frac{7}{8}$

   On obtient : $(z-\frac{7}{8})G(z) = \dfrac{(z)(z-\frac{7}{8})}{(z-1)(z-\frac{7}{8})} = \dfrac{A(z-\frac{7}{8})}{z-1} + \dfrac{B(z-\frac{7}{8})}{z-\frac{7}{8}}$

   puis $(z-\frac{7}{8})G(z) = \dfrac{z}{z-1} = \dfrac{A(z-\frac{7}{8})}{z-1} + B$

   et enfin $\lim\limits_{z\to \frac{7}{8}}(z-\frac{7}{8})G(z) = -7 = 0 + B$ donc $B = -7$

   On a donc obtenu que $G(z) = \dfrac{z}{(z-1)(z-\frac{7}{8})} = \dfrac{8}{z-1} - \dfrac{7}{z-\frac{7}{8}}$

   En déduire l'expression de $y(n)$ en fonction de n valable pour tout $n \in \mathbb{N}$

   D'après ce qui précède, on a : $\mathcal{Z}_y(z) = \dfrac{1}{8}\,\dfrac{z^2}{(z-1)\left(z-\dfrac{7}{8}\right)} = \dfrac{z}{z-1} - \frac{7}{8} \times \dfrac{z}{z-\frac{7}{8}}$

   A l'aide de la table des transformées usuelles, on a :

   $y(n) = e(n) - \frac{7}{8} \times \left(\frac{7}{8}\right)^n e(n) = e(n) \times \left(1 - \left(\frac{7}{8}\right)^{n+1}\right)$

5. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} y(n)$

   Puisque $\left|\frac{7}{8}\right| < 1$, on a : $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{7}{8}\right)^{n+1} = 0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} y(n) = 1$