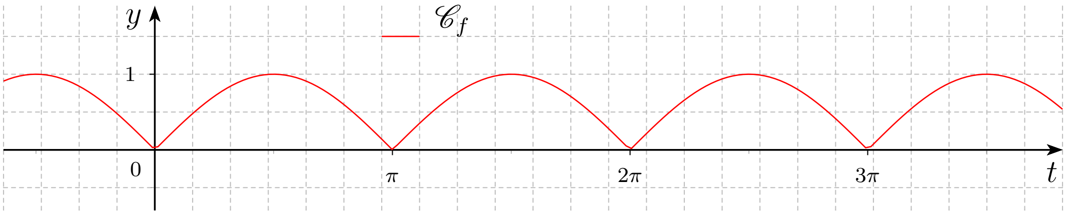
En physique appliquée, on utilise parfois le signal défini par $f(t) = |\sin(t)|$.

1. Utiliser un grapheur pour représenter f sur au moins deux périodes.



2. Montrer que le coefficient $a_0 = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin(t)\mathrm{d}t$ puis le calculer.

La fonction est clairement π-périodique.

En effet, pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a : $f(t+\pi) = |\sin(t+\pi)| = |-\sin(t)| = |sin(t)| = f(t)$

$a_0 = \dfrac{1}{T}\displaystyle\int_\alpha^{\alpha+T} f(t)\mathrm{d}t$, on choisit : $\alpha = \frac{-T}{2} = -\pi$ on a alors : $a_0 = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(t)\mathrm{d}t$

La fonction est paire, en effet, pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a :

$f(-t) = |\sin(-t)| = |-\sin(t)| = |sin(t)| = f(t)$ donc $a_0 = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(t)\mathrm{d}t$

sur l'intervalle $[0; \frac{\pi}{2}]$, sin est positif donc $|\sin(t)| = \sin(t)$ donc $a_0 = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin(t)\mathrm{d}t$

On a donc : $a_0 = \dfrac{2}{\pi}\Big[-\cos(t)\Big]_0^{\pi/2} = \dfrac{2}{\pi}$

3. Calculer le carré de la valeur efficace de f sur une période, noté V_{eff}^2.

Par les mêmes raisons : $V_{\mathit{eff}}^2 = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin^2(t)\mathrm{d}t$

$\cos^2 t + \sin^2 t = 1$ et $\cos^2 t - \sin^2 t = \cos(2t)$ donc $\sin^2 t = \dfrac{1-\cos(2t)}{2}$

donc $V_{\mathit{eff}}^2 = \dfrac{2}{\pi} \times \dfrac{1}{2} \times \displaystyle\int_0^{\pi/2} 1 - \cos(2t)\mathrm{d}t = \dfrac{1}{\pi} \times \left[t - \dfrac{1}{2}\sin(2t)\right]_0^{\pi/2} = \dfrac{1}{2}$

On rappelle que pour tout $A, B \in \mathbb{R}$, on a : $2\sin A \cos B = \sin(A+B) + \sin(A-B)$.

4. Calculer les coefficients a_n et b_n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Puisque f est une fonction paire, tous les coefficients b_n sont nuls

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $a_n = \dfrac{2}{T}\displaystyle\int_\alpha^{\alpha+T} f(t)\cos(n\omega t)\mathrm{d}t$

$T = \pi$ donc $\omega = \frac{2\pi}{T} = 2$ et, puisque f est aire, on choisit $\alpha = -\frac{\pi}{2}$

$a_n = \dfrac{2}{\pi} \times \displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(t)\cos(2nt)\mathrm{d}t \quad = \quad \dfrac{4}{\pi} \times \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(t)\cos(2nt)\mathrm{d}t$ car $f \times \cos$ est paire

$a_n = \dfrac{4}{\pi} \times \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(t)\cos(2nt)\mathrm{d}t \quad = \quad \dfrac{2}{\pi} \times \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin((1+2n)t) + \sin((1-2n)t)\mathrm{d}t$

$$a_n = \frac{2}{\pi} \times \left[\frac{-\cos((1+2n)t)}{1+2n} + \frac{-\cos((1-2n)t)}{1-2n}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$a_n = \frac{2}{\pi} \times \left(\frac{-\cos((1+2n)\frac{\pi}{2})+1}{1+2n} + \frac{-\cos((1-2n)\frac{\pi}{2})+1}{1-2n}\right) \text{ car } \cos(0)=1$$

$$\text{or } \cos\left((1+2n)\tfrac{\pi}{2}\right) = \cos\left(\tfrac{\pi}{2}+n\pi\right) = \cos\left((1-2n)\tfrac{\pi}{2}\right) = \cos\left(\tfrac{\pi}{2}-n\pi\right) = 0$$

$$\text{donc } a_n = \frac{2}{\pi} \times \left(\frac{1}{1+2n} + \frac{1}{1-2n}\right)$$

$$\text{donc } a_n = \frac{2}{\pi} \times \left(\frac{1-2n}{(1+2n)(1-2n)} + \frac{1+2n}{(1-2n)(1+2n)}\right)$$

$$\text{donc } a_n = \frac{2}{\pi} \times \frac{2}{(1+2n)(1-2n)}$$

$$\text{donc } a_n = \frac{4}{\pi(1-4n^2)}$$

5. Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a :

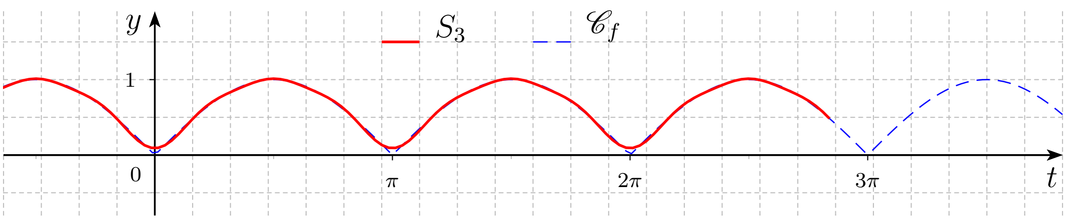
$$S_3(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{3} a_n \cos(2\omega t) + b_n \sin(2\omega t) = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \times \left(\frac{1}{3}\cos(2t) + \frac{1}{15}\cos(4t) + \frac{1}{35}\cos(6t)\right).$$

Calculer les 1er a_n avec la formule : $a_n = \dfrac{4}{\pi(1-4n^2)}$

n	0	1	2	3
a_n	$\frac{2}{\pi}$	$\frac{-4}{3\pi}$	$\frac{-4}{15\pi}$	$\frac{-4}{35\pi}$

on a bien : $S_3(t) = \dfrac{2}{\pi} - \dfrac{4}{\pi} \times \left(\dfrac{1}{3}\cos(t) + \dfrac{1}{15}\cos(2t) + \dfrac{1}{35}\cos(3t)\right)$.

6. Utiliser le grapheur pour superposer les deux courbes.



7. A l'aide de la formule de Parseval calculer la carré de la valeur efficace de S_3, noté W_{eff}^2 puis la qualité de l'émulation, le rapport $\dfrac{W_{eff}^2}{V_{eff}^2}$. Qu'en concluez vous ?

La formule de Parseval donne $W_{eff}^2 = a_0^2 + \dfrac{1}{2}\displaystyle\sum_{n=1}^{3} a_n^2 + b_n^2 \approx 0,49996$

donc le rapport $\dfrac{W_{eff}^2}{V_{eff}^2} \approx 0,999$ le signal S_3 est donc un très bon émulateur du signal $t \mapsto |\sin(t)|$.