La fonction échelon unité $\mathcal{U}$ est définie par $\mathcal{U}(t) = 0$ si $t < 0$ et $\mathcal{U}(t) = 1$ si $t \geqslant 0$.

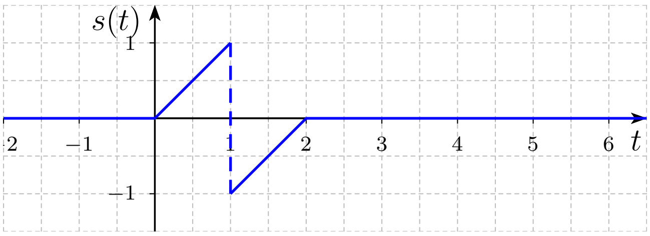
On considère le système « entrée-sortie »pour lequel on note s le signal de sortie associé au signal d'entrée e. Les fonctions s et e sont des fonctions causales, c'est-à-dire qu'elles sont nulles pour $t < 0$. On admet que les fonctions s et e admettent des transformées de Laplace, notées respectivement S et E.

La fonction de transfert H du système est définie par : $S(p) = H(p) \times E(p)$.

On considère le signal d'entre e défini par : $e(t) = t\mathcal{U}(t) - 2\mathcal{U}(t-1) - (t-2)\mathcal{U}(t-2)$

et la fonction H définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par $H(p) = \dfrac{1}{p+1}$.

1. Tracer la courbe représentative de la fonction e dans un repère orthonormal.



2. Pour $p > 0$, déterminer $E(p)$.

   D'après la table des transformées usuelles, on a : $E(p) = \dfrac{1}{p^2} - 2\dfrac{1}{p}e^{-p} - \dfrac{1}{p^2}e^{-2p}$

3. Déterminer tes nombres réels A, B, et C tels que

   $\forall p > 0$, on ait : $\dfrac{1}{p^2(p+1)} = \dfrac{A}{p^2} + \dfrac{B}{p} + \dfrac{C}{p+1}$.

   On admet par ailleurs que : $\dfrac{2}{p(p+1)} = \dfrac{2}{p} - \dfrac{2}{p+1}$

   Pour trouver A, associé à p^2, on multiplie l'égalité par p^2, on simplifie et on fait tendre p vers 0, on obtient $A = 1$

   Pour trouver C, associé à $p+1$, on multiplie l'égalité par $p+1$, on simplifie et on fait tendre p vers -1, on obtient $C = 1$

   Pour trouver B, associé à p, on multiplie l'égalité par p, on simplifie et on fait tendre p vers $+\infty$, on obtient $0 = 0 + B + C$ donc $B = -1$

4. (a) Déterminer $S(p)$ puis $s(t)$.

   D'après l'énoncé : $S(p) = \dfrac{1}{p+1} \times \left(\dfrac{1}{p^2} - 2\dfrac{1}{p}e^{-p} - \dfrac{1}{p^2}e^{-2p}\right)$

   donc $S(p) = \dfrac{1}{p+1} \times \left(\dfrac{1}{p^2}(1 - e^{-2p} - 2\dfrac{1}{p}e^{-p}\right)$

   donc $S(p) = \dfrac{1}{(p+1)p^2} \times (1 - e^{-2p}) - 2\dfrac{1}{p(p+1)} \times e^{-p}$

donc $S(p) = \left(\frac{1}{p^2} - \frac{1}{p} + \frac{1}{p+1}\right) \times (1 - e^{-2p}) - \left(\frac{2}{p} - \frac{2}{p+1}\right) \times e^{-p}$

donc $S(p) = \left(\frac{1}{p^2} - \frac{1}{p} + \frac{1}{p+1}\right) - \left(\frac{1}{p^2} - \frac{1}{p} + \frac{1}{p+1}\right) e^{-2p} - \left(\frac{2}{p} - \frac{2}{p+1}\right) \times e^{-p}$

On a alors :

$$s(t) = \Big(tU(t) - U(t) + e^{-t}U(t)\Big) - \Big((t-2)U(t-2) - U(t-2) + e^{-t+2}U(t-2)\Big) - \Big(2U(t-1) - 2e^{-t+1}U(t-1)\Big)$$

(b) En déduire que la fonction s est définie par : $\begin{cases} s(t) = 0 & \text{si } t < 0 \\ s(t) = t - 1 + \mathrm{e}^{-t} & \text{si } 0 \leqslant t < 1 \\ s(t) = t - 3 + \mathrm{e}^{-t}(1 + 2\mathrm{e}) & \text{si } 1 \leqslant t < 2 \\ s(t) = \mathrm{e}^{-t}(1 + 2\mathrm{e} - \mathrm{e}^2) & \text{si } t \geqslant 2 \end{cases}$

Si $t < 0$ alors $U(t) = U(t-1) = U(t-2) = 0$

alors $s(t) = 0 - 0 - 0 = 0$

Si $0 \leqslant t < 1$ alors $U(t) = 0$ et $U(t-1) = U(t-2) = 0$

alors $s(t) = t - 1 + e^{-t}$

Si $1 \leqslant t < 2$ alors $U(t) = U(t-1) = 1$ et $U(t-2) = 0$

alors $s(t) = t - 1 + e^{-t} - 2 + 2e^{-t+1} = t - 3e^{-t}(1 + 2e)$

Si $2 \leqslant t$ alors $U(t) = U(t-1) = U(t-2) = 1$

alors $s(t) = t - 1 + e^{-t} - 2 + 2e^{-t+1} - (t-2) + 1 + e^{-t+2} = e^{-t}(1 + 2e - e^2)$

Pour information, le graphe de s serait celui-ci :